Exercice 1. Intégrales doubles en coordonnées polaires

Esquisser le domaine D, puis calculer, à l'aide des coordonnées polaires, l'intégrale double

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

a) $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$.

b) $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\,,\ x\le y\}$.

Correction.

On va utiliser les coordonnées polaires qui sont données par

$$(x,y) = \Phi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

Le jacobien est r. La formule de changement de variable donne

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\tilde{D}} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

avec $\tilde{D}$ tel que $D = \Phi(\tilde{D})$.

a) En coordonnée polaire, on représente le domaine d'intégration D comme $\Phi(\tilde{D})$ où

$$\tilde{D} = \left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi\right\}.$$

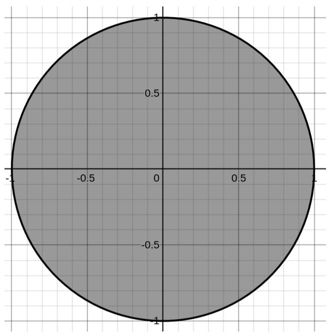


Figure 1: D est le disque unité.

On a alors

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\tilde{D}} \sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

Remarque : on a en fait calculer la même intégrale que dans l'exercice 9, série 12, à savoir le volume d'une demi-boule décrite comme un graphe de fonction, mais à l'aide des coordonnées polaires, ce qui facilite le calcul.

b) En coordonnée polaire, on représente à présent le domaine d'intégration D comme $\Phi(\tilde{D})$ où

$$\tilde{D} = \left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le r\le 1\,,\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}\right\}.$$

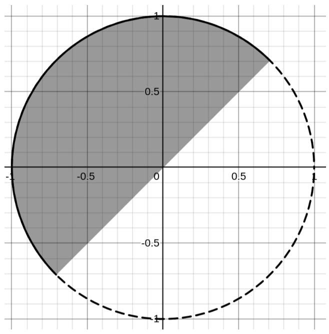


Figure 2: D est le demi-disque supérieur obtenu en coupant le disque par la droite $y = x$.

Comme le jacobien de la transformation est r, nous avons

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\tilde{D}} \sqrt{1-r^2}\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \pi\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

Exercice 2. Intégrales doubles en coordonnées polaires

a) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x\}$. Esquisser D et le représenter en coordonnées polaires, puis calculer
$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

b) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq\ x^2+y^2 \leq 16, y \geq |x|\}$. Esquisser D et le représenter en coodonnées polaires, puis calculer
$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Correction.

On utilise les coordonnées polaires qui sont données par

$$(x,y) = \Phi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

Le jacobien est r.

a) En coordonnée polaire, on représente le domaine D comme $\Phi(\tilde{D})$ avec

$$\tilde{D} = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 2\,,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}.$$

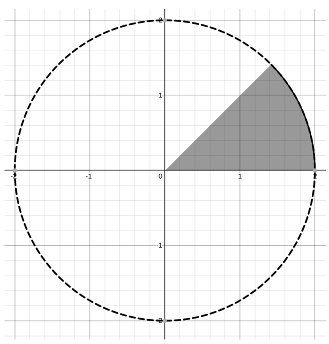


Figure 3: D est le secteur du disque de rayon 2 compris entre $y = x$ et $y = 0$.

Comme le jacobien de la transformation est r, nous avons

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{\tilde{D}} \frac{1}{1+r^2}\, r\mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta \\
&= \Big(\int_0^2 \frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r\Big)\Big(\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta\Big) \\
&= \Big[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\Big]_0^2 \Big[\theta\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}\ln 5\,.
\end{aligned}
$$

b) En coordonnée polaire, on représente le domaine D comme $\Phi(\tilde{D})$ avec

$$
\tilde{D} = \Big\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq r \leq 4\,,\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}\Big\}.
$$

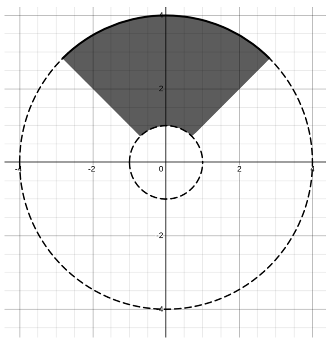


Figure 4: D est un secteur de l'anneau de rayon intérieur 1 et de rayon extérieur 4.

$$
\begin{aligned}
\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{\tilde{D}} (r\cos\varphi)(r\sin\theta)r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \Big(\int_1^4 r^3\mathrm{d}r\Big)\Big(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\Big) \\
&= \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_1^4 \Big[\frac{\sin^2\theta}{2}\Big]_{\pi/4}^{3\pi/4} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Exercice 3. Intégrale double par changement de variable

Soit D le parallèlogramme de sommets $(1,1),(3,3),(4,5),(2,3)$ et la fonction $f(x,y) = xy$. Calculer, à l'aide d'un changement de variable :

$$
\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
$$

Correction.

On voit D comme le parallèlogramme généré par les vecteurs de base de $\mathbb{R}^2$ $\vec{a} = (3,3)-(1,1) = (2,2)$ et $\vec{b} = (2,3)-(1,1) = (1,2)$ depuis le point $(1,1)$.

On transforme le parallèlogramme dans le carré unitaire $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ généré par les vecteurs de base $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ à l'aide d'un changement de base : tout vecteur (x,y) peut se voir comme une combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$, translatée en $(1,1)$. Plus précisément

$$
(x,y) = (1,1) + \tilde{x}\vec{a} + \tilde{y}\vec{b} = (1,1) + \tilde{x}(2,2) + \tilde{y}(1,2) = (1+2\tilde{x}+\tilde{y}, 1+2\tilde{x}+2\tilde{y}), \tilde{x},\tilde{y} \in [0,1].
$$

ce qui sous forme matricielle donne

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

où A est la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ dont les colonnes sont les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ qui portent le parallèlogramme.

L'application de changement de base des coordonnées (x, y) à $(\tilde{x}, \tilde{y})$ (c'est-à-dire l'application qui permet de récrire x et y en terme $\tilde{x}, \tilde{y}$) est

$$(x, y) = \Phi(\tilde{x}, \tilde{y}), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{D} = [0,1] \times [0,1]$$

et la formule de changement de variable donne donc

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\tilde{D}} f(\Phi(\tilde{x}, \tilde{y}))|\det \nabla\Phi(\tilde{x}, \tilde{y})|d\tilde{x}d\tilde{y} = \int_0^1 \int_0^1 f(\Phi(\tilde{x}, \tilde{y}))|\det \nabla\Phi(\tilde{x}, \tilde{y})|d\tilde{x}d\tilde{y}.$$

Or

$$f(x,y) = xy = (1 + 2\tilde{x} + \tilde{y})(1 + 2\tilde{x} + 2\tilde{y}) = 1 + 4\tilde{x} + 3\tilde{y} + 6\tilde{x}\tilde{y} + 4\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 = f(\Phi(\tilde{x}, \tilde{y}))$$

et

$$|\det \nabla\Phi(\tilde{x}, \tilde{y})| = |\det A| = 2$$

d'où

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \int_0^1 1 + 4\tilde{x} + 3\tilde{y} + 6\tilde{x}\tilde{y} + 4\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 d\tilde{x}d\tilde{y} = 16.$$

Exercice 4. Calcul de volume et intégrale triple en coordonnées cylindrique

a) Soit E l'ensemble donné par

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, z^2 \leq x^2 + y^2\right\}.$$

Décrire E et calculer $\mathrm{Vol}(E)$.

b) Soit E l'ensemble donné par

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, -x \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\right\}.$$

Décrire E et calculer

$$\iiint_E f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

avec $f(x,y,z) = xz$.

Correction.

On rappelle que les coordonnées cylindriques sont données par $(x,y,z) = \Phi(r, \theta, z)$ avec

$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), z = z, \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi].$$

Le jacobien est r.

a) E est un cylindre de rayon et de hauteur 1 duquel on a retiré un cône en son centre.

Comme z est positif la condition

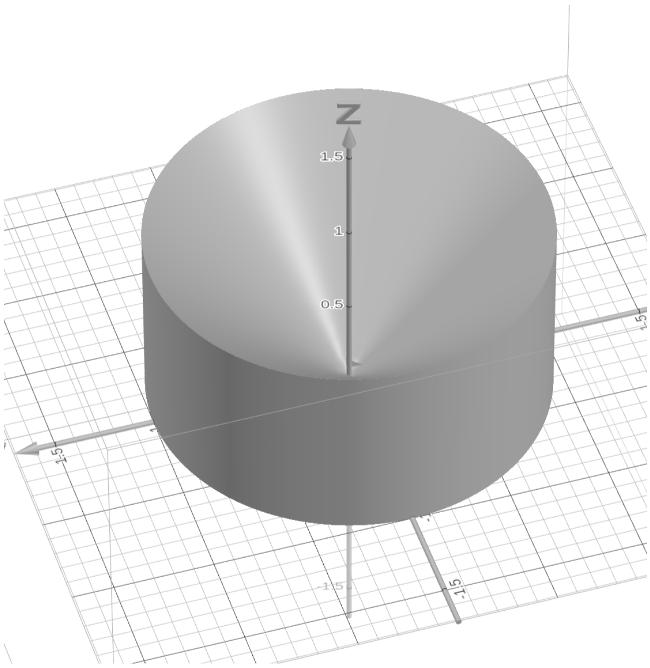
$$z^2 \leq x^2 + y^2$$

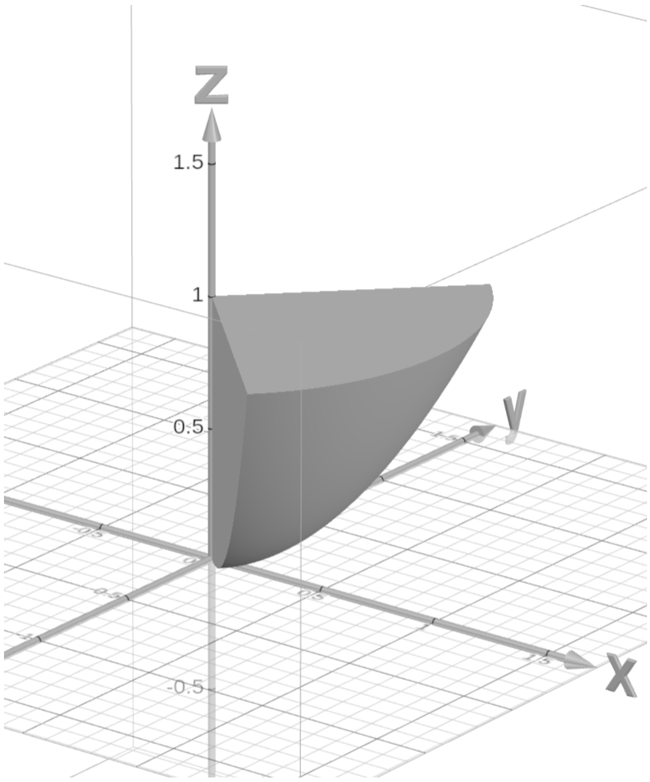
est équivalente à $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. En coordonnée cylindrique, le domaine E est représenté par $E = \Phi(\tilde{E})$ où

$$\tilde{E} = \left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 1, \theta \in [0, 2\pi], 0 \leq z \leq r\right\}.$$

On a donc

$$\mathrm{Vol}(E) = \iiint_{\tilde{E}} 1r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\mathrm{d}r \int_0^r \mathrm{d}z = \frac{2\pi}{3}.$$





b) E est un secteur de paraboloïde.

En coordonnée cylindrique, il est donné comme $E = \Phi(\tilde{E})$ avec

$$\tilde{E} = \left\{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 1, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, r^2 \leq z \leq 1 \right\}.$$

On a alors

$$\iiint_E f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{\tilde{E}} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(\theta)\mathrm{d}\theta \int_0^1 r^2 \mathrm{d}r \int_{r^2}^1 z\mathrm{d}z$$

$$\sin(\theta)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^1 r^2 \frac{1}{2}(1 - r^4)\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{7}r^7\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{21}.$$

Exercice 5. Calcul de volume et intégrale triple en coordonnées sphériques

a) Calculer le volume de la sphère unité en utilisant les coordonnées sphériques.

b) Soit E l'ensemble donné par

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x, y \geq 0, z \leq 0\right\}.$$

Décrire E puis calculer

$$\iiint_E f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

avec $f(x,y,z) = z$.

Correction.

On rappelle que les coordonnées sphériques sont données par $(x,y,z) = \Phi(r,\varphi,\theta)$ avec

$$r \geq 0, \varphi \in [0,2\pi], \theta \in [0,\pi]$$

et

$$x = r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta).$$

Le jacobien est $r^2\sin(\theta)$

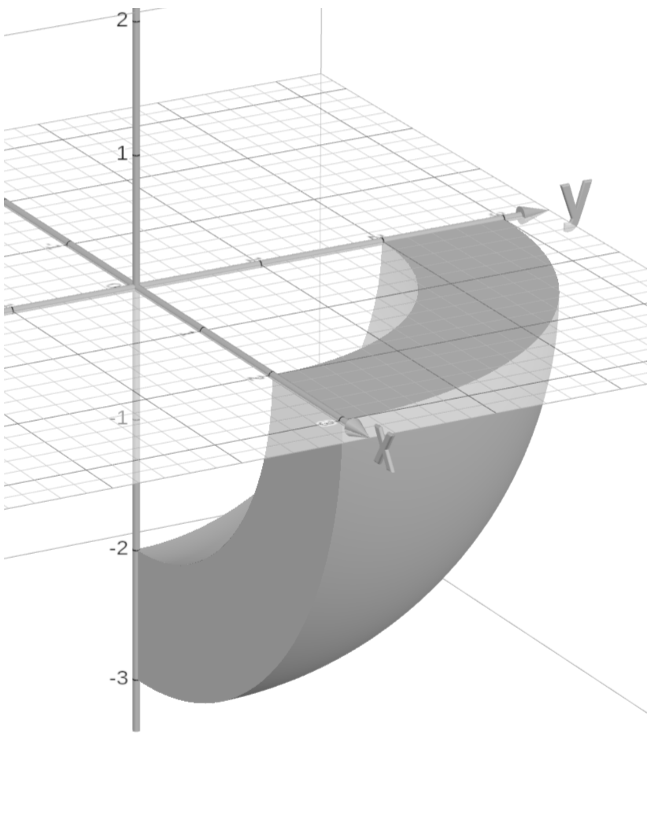
a) Le volume de la sphère de rayon 1 E est donné par

$$\iiint_E 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^\pi \sin(\theta)\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^2\mathrm{d}r = 2\pi \cdot [-\cos(\theta)]_0^\pi \cdot [\frac{1}{3}r^3]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

b) En coordonnée sphérique, l'ensemble E est représenté comme $E = \Phi(\tilde{E})$ avec

$$\tilde{E} = \left\{(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \leq r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\right\}.$$

C'est un secteur de sphère creuse de rayon intérieur 2 et de rayon extérieur 3. On a donc



$$\iiint_E f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\tilde{E}} r\cos(\theta) r^2 \sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi 2\mathrm{d}\varphi \int_{\pi/2}^\pi \cos(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta \int_2^3 r^3\mathrm{d}r.$$

D'où

$$\iiint_E f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\int_{\pi/2}^\pi \frac{1}{2}\sin(2\theta)\mathrm{d}\theta \cdot \left[\frac{1}{4}r^2\right]_2^3 = \frac{\pi}{2}\cdot\left[\frac{-\cos(2\theta)}{4}\right]_{\pi/2}^\pi \frac{65}{4} = -\frac{65\pi}{16}.$$

Exercice 6. Révisions - Calcul de volume

Soit E donné par

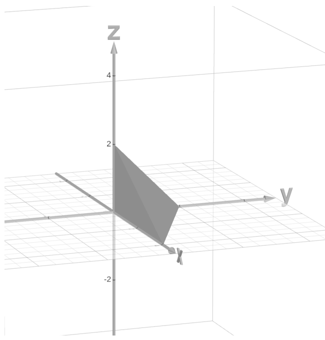
$$E = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geq 0 \text{ et } x+2y+2z \leq 4\right\}.$$

Calculer le volume de E.

Correction.

E est le tétraèdre de sommets $(0,0,0)$, $(4,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$. On peut décrire E comme l'ensemble des (x,y,z) tels que

- $0 \leq x \leq 4$
- $0 \leq y \leq 2 - \frac{1}{2}x$
- $0 \leq z \leq 2 - y - \frac{1}{2}x$



On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(E) &= \int_0^4 \mathrm{d}x \int_0^{2-1/2x} \mathrm{d}y \int_0^{2-y-1/2x} 1\,\mathrm{d}z = \int_0^4 \mathrm{d}x \int_0^{2-1/2x} 2 - y - \frac{1}{2}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^4 2(2-\frac{1}{2}x) - \frac{1}{2}(2-\frac{1}{2}x)^2 - \frac{1}{2}x(2-\frac{1}{2}x)\mathrm{d}x = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Exercice 7. Facultatif - Force exercée sur un barrage

Dans cet exercice, on s'intéresse à la force de pression exercée par de l'eau sur un barrage. Nous considérons trois géométries différentes, de difficulté calculatoire croissante. Un exercice élémentaire de statique des fluides permet d'obtenir la pression de l'eau en fonction de la profondeur. Nous adopterons les conventions suivantes: la surface de l'eau sur trouve à l'altitude $z = H > 0$, et nous considérons un bassin dont le fond est plat à $z = 0$. Nous notons ρ la densité de l'eau, supposée constante, g l'accélération de gravité et p_0 la pression de l'air à la surface de l'eau en $z = H$. La pression p à l'altitude z est donnée par la formule

$$p(z) = p_0 + \rho g(H - z).$$

La pression représente une force par unité de surface, on obtient la force totale exercée par l'eau sur le barrage en intégrant la pression sur la surface $\mathcal{S}$ du barrage:

$$\boldsymbol{F}_{\text{eau}\to\text{barrage}} = \boldsymbol{F}_{\text{eb}} = \iint_{\mathcal{S}} p \, \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

Avec ces données, il ne reste plus qu'à préciser la géométrie du barrage pour calculer la force de pression exercée par l'eau sur le barrage.

a) **Barrage plat.** On considère la surface suivante $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0,\ -L/2 \leq y \leq L/2,\ 0 \leq z \leq H\}$ où L représente la largeur du barrage et H sa hauteur. On considère que l'eau se trouve dans la zone $x < 0$. On orientera donc la normale de la surface $\mathcal{S}$ selon $\boldsymbol{e}_x = (1, 0, 0)$.

   (a) Représenter la surface $\mathcal{S}$ et écrire $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

   (b) Calculer la force $\boldsymbol{F}_{\text{eb}}$.

b) **Barrage incurvé.** On considère désormais un barrage incurvé, décrit par la surface $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \leq 0,\ x^2 + y^2 = L^2/4,\ 0 \leq z \leq H\}$. On considère que l'eau se trouve dans la zone $x < 0$, $x^2 + y^2 > L^2/4$.

   (a) Représenter la situation vue du dessus (dans le plan Oxy).

   (b) On utilise les coordonnées polaires pour cet exercice, et on écrit $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{L}{2}\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_r$. À l'aide du schéma, déterminer les bornes d'intégration et calculer la force $\boldsymbol{F}_{\text{eb}}$.
   Attention: $\boldsymbol{e}_r = \cos\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\boldsymbol{e}_y$.

c) **Barrage incurvé incliné.** On tente de se rapprocher de la réalité avec la géométrie suivante. Le haut du barrage est plus large que le bas, et le barrage est incurvé avec un rayon de courbure $R(z)$ variable en fonction de l'altitude. On veut donc $R(0) = R_0$, $R(H) = R_H$, avec $R_H > R_0$. On propose la relation suivante $R(z) = R_0 + \frac{z}{H}(R_H - R_0)$. La surface du barrage est donnée par $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \leq 0,\ x^2 + y^2 = R^2(z),\ 0 \leq z \leq H\}$.

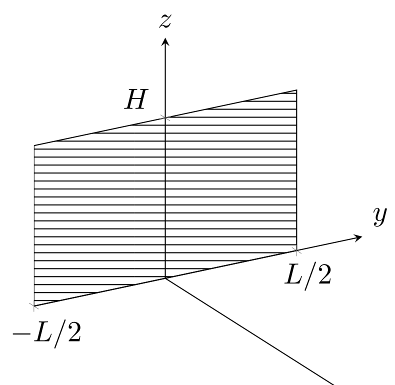
   (a) Représenter la situation en 3 dimensions.

   (b) Calculer la force exercée par l'eau sur le barrage. On donne

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = R(z)\left(-\boldsymbol{e}_r + \frac{R_H - R_0}{H}\boldsymbol{e}_z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta.$$

Correction.

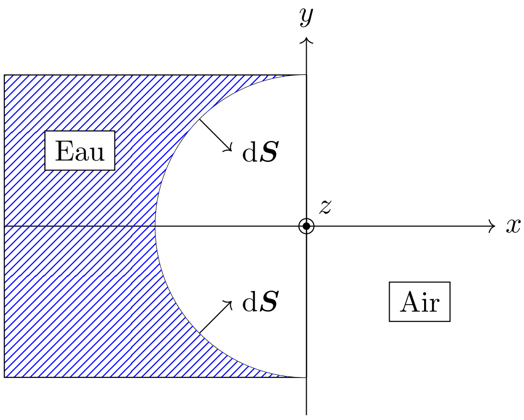
a) (a) On représente ci-dessous la surface du barrage. L'élement de surface s'écrit $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_x$.

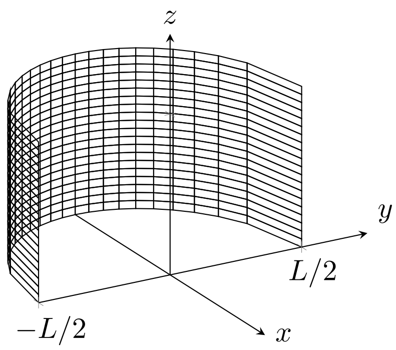


(b) On écrit

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\text{eb}} &= \int_0^H \int_{-L/2}^{L/2} p_0 + \rho g(H-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_x \\
&= \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}y \int_0^H p_0 + \rho g(H-z)\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_x \\
&= L\left[p_0 z - \frac{1}{2}\rho g(H-z)^2\right]_0^H \boldsymbol{e}_x \\
&= L\left(p_0 H + \frac{1}{2}\rho g H^2\right)\boldsymbol{e}_x \\
&= LH\left(p_0 + \frac{1}{2}\rho g H\right)\boldsymbol{e}_x.
\end{aligned}$$

b) (a) On représente la situation vue du dessus et la surface du barrage en 3 dimensions.

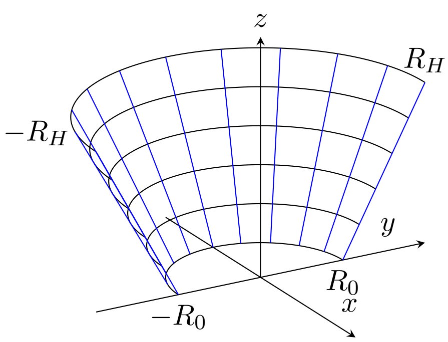




(b) On écrit

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\text{eb}} &= -\frac{L}{2}\int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/2}\int_{z=0}^{H}(p_0 + \rho g(H-z))\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{L}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}\theta \int_0^H p(z)\mathrm{d}z \\
&= -\frac{L}{2}\left[\sin\theta\boldsymbol{e}_x - \cos\theta\boldsymbol{e}_y\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} H\left(p_0 + \frac{1}{2}\rho g H\right) \\
&= -\frac{L}{2}(-\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_x)H\left(p_0 + \frac{1}{2}\rho g H\right) \\
&= LH\left(p_0 + \frac{1}{2}\rho g H\right)\boldsymbol{e}_x.
\end{aligned}$$

c) (a) On représente la surface du barrage.



(b) On calcule

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\text{eb}} &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^H (p_0 + \rho g(H-z))R(z)\left(-\boldsymbol{e}_r + \frac{R_H - R_0}{H}\boldsymbol{e}_z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(-\boldsymbol{e}_r + \frac{R_H - R_0}{H}\boldsymbol{e}_z\right)\mathrm{d}\theta \int_0^H (p_0 + \rho g(H-z))R(z)\mathrm{d}z \\
&= \left(2\boldsymbol{e}_x + \pi\frac{R_H - R_0}{H}\boldsymbol{e}_z\right)\int_0^H (p_0 + \rho g(H-z))R(z)\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Pour l'intégrale sur z, on utilise la technique d'intégration par parties successives. On pose

$$\begin{aligned}
u(z) &= p_0 + \rho g(H-z) & v''(z) &= R(z) = R_0 + \frac{z}{H}(R_h - R_0) \\
u'(z) &= -\rho g & v'(z) &= R_0 z + \frac{z^2}{2H}(R_H - R_0) \\
u''(z) &= 0 & v(z) &= \frac{1}{2}R_0 z^2 + \frac{z^3}{6H}(R_H - R_0)
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\int_0^H (p_0 + \rho g(H-z))R(z)\mathrm{d}z = &\left[(p_0 + \rho g(H-z))\left(R_0 z + \frac{z^2}{2H}(R_H - R_0)\right)\right. \\
&\left. + \rho g\left(\frac{1}{2}R_0 z^2 + \frac{z^3}{6H}(R_H - R_0)\right)\right]_0^H \\
= &p_0\left(R_0 H + \frac{H}{2}(R_h - R_0)\right) + \rho g\left(\frac{1}{2}R_0 H^2 + \frac{H^2}{6}(R_H - R_0)\right) \\
= &\frac{1}{2}p_0 H(R_H + R_0) + \frac{1}{6}\rho g H^2(2R_0 + R_H).
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\boldsymbol{F}_{\text{eb}} = \left(p_0 H(R_H + R_0) + \frac{1}{3}\rho g H^2(2R_0 + R_H)\right)\left(\boldsymbol{e}_x + \frac{\pi}{2}\frac{R_H - R_0}{H}\boldsymbol{e}_z\right).$$