Exercice 1. Intégrales doubles en coordonnées polaires
Esquisser le domaine D, puis calculer, à l'aide des coordonnées polaires, l'intégrale double

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

a) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\right\}$.

b) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\,,\ x \leq y\right\}$.

Exercice 2. Intégrales doubles en coordonnées polaires

a) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x\}$. Esquisser D et le représenter en coordonnées polaires, puis calculer
$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

b) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq\ x^2+y^2 \leq 16, y \geq |x|\}$. Esquisser D et le représenter en coodonnées polaires, puis calculer
$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exercice 3. Intégrale double
Soit D le parallèlogramme de sommets $(1,1),(3,3),(4,5),(2,3)$ et la fonction $f(x,y)=xy$. Calculer, à l'aide d'un changement de variable :

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exercice 4. Calcul de volume
Soit E donné par

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geq 0 \text{ et } x+2y+2z \leq 4\right\}.$$

Calculer le volume de E.

Exercice 5. Calcul de volume et intégrale triple

a) Soit E l'ensemble donné par

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1, z \geq 0, z^2 \leq x^2+y^2\right\}.$$

Décrire E et calculer $\mathrm{Vol}(E)$.

b) Soit E l'ensemble donné par

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, -x \leq y \leq x, x^2+y^2 \leq 1, x^2+y^2 \leq z \leq 1\right\}.$$

Décrire E et calculer
$$\iiint_E f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

avec $f(x,y,z)=xz$.

Exercice 6. Calcul de volume et intégrale triple en coordonnées sphériques

a) Calculer le volume de la sphère unité en utilisant les coordonnées sphériques.

b) Soit E l'ensemble donné par

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x, y \geq 0, z \leq 0\right\}.$$

Décrire E puis calculer

$$\iiint_E f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

avec $f(x, y, z) = z$.

Exercice 7. Facultatif - Force exercée sur un barrage

Dans cet exercice, on s'intéresse à la force de pression exercée par de l'eau sur un barrage. Nous considérons trois géométries différentes, de difficulté calculatoire croissante. Un exercice élémentaire de statique des fluides permet d'obtenir la pression de l'eau en fonction de la profondeur. Nous adopterons les conventions suivantes: la surface de l'eau sur trouve à l'altitude $z = H > 0$, et nous considérons un bassin dont le fond est plat à $z = 0$. Nous notons ρ la densité de l'eau, supposée constante, g l'accélération de gravité et p_0 la pression de l'air à la surface de l'eau en $z = H$. La pression p à l'altitude z est donnée par la formule

$$p(z) = p_0 + \rho g(H - z).$$

La pression représente une force par unité de surface, on obtient la force totale exercée par l'eau sur le barrage en intégrant la pression sur la surface $\mathcal{S}$ du barrage:

$$\boldsymbol{F}_{\text{eau}\to\text{barrage}} = \boldsymbol{F}_{\text{eb}} = \iint_{\mathcal{S}} p \ \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

Avec ces données, il ne reste plus qu'à préciser la géométrie du barrage pour calculer la force de pression exercée par l'eau sur le barrage.

a) **Barrage plat.** On considère la surface suivante $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0,\ -L/2 \leq y \leq L/2,\ 0 \leq z \leq H\}$ où L représente la largeur du barrage et H sa hauteur. On considère que l'eau se trouve dans la zone $x < 0$. On orientera donc la normale de la surface $\mathcal{S}$ selon $\boldsymbol{e}_x = (1, 0, 0)$.

   (a) Représenter la surface $\mathcal{S}$ et écrire $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

   (b) Calculer la force $\boldsymbol{F}_{\text{eb}}$.

b) **Barrage incurvé.** On considère désormais un barrage incurvé, décrit par la surface $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \leq 0,\ x^2 + y^2 = L^2/4,\ 0 \leq z \leq H\}$. On considère que l'eau se trouve dans la zone $x < 0$, $x^2 + y^2 > L^2/4$.

   (a) Représenter la situation vue du dessus (dans le plan Oxy).

   (b) On utilise les coordonnées polaires pour cet exercice, et on écrit $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{L}{2}\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_r$. À l'aide du schéma, déterminer les bornes d'intégration et calculer la force $\boldsymbol{F}_{\text{eb}}$.
   Attention: $\boldsymbol{e}_r = \cos\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\boldsymbol{e}_y$.

c) **Barrage incurvé incliné.** On tente de se rapprocher de la réalité avec la géométrie suivante. Le haut du barrage est plus large que le bas, et le barrage est incurvé avec un rayon de courbure $R(z)$ variable en fonction de l'altitude. On veut donc $R(0) = R_0$, $R(H) = R_H$, avec $R_H > R_0$. On propose la relation suivante $R(z) = R_0 + \frac{z}{H}(R_H - R_0)$. La surface du barrage est donnée par $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \leq 0,\ x^2 + y^2 = R^2(z),\ 0 \leq z \leq H\}$.

   (a) Représenter la situation en 3 dimensions.

(b) Calculer la force exercée par l'eau sur le barrage. On donne

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\sqrt{1 + \left(\frac{R_H - R_0}{H}\right)^2} R(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_r.$$

Réponses

Exercice 1.

a) $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi/3$.

b) $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi/3$.

Exercice 2.

a) $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{8}\ln 5$.

b) $\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.

Exercice 3.

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 16.$$

Exercice 4.

$$\mathrm{vol}(E) = 8/3.$$

Exercice 5.

a) $\mathrm{vol}(E) = 2\pi/3$.

b) $\iiint_E f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\sqrt{2}/21$.

Exercice 6.

a) Le volume de la sphère de rayon 1 vaut $4\pi/3$.

b) $\iiint_E f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -65\pi/16$.