

Exercice 1. Théorème de la moyenne sur des courbes

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $\Gamma \subset \Omega$ une courbe simple et régulière telle que $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ est une paramétrisation simple et régulière de Γ .

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(\gamma(c)) = \frac{1}{\text{long}(\Gamma)} \int_{\Gamma} f dl.$$

Correction.

On a

$$\int_{\Gamma} f dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Soit $g = f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Par composition, on a que $g \in \mathcal{C}^0([a, b])$. Par conséquent, la fonction $g = f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ prend son minimum et son maximum sur $[a, b]$ et on a, pour tout $t \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} \min_{s \in [a, b]} g(s) &\leq g(t) \leq \max_{s \in [a, b]} g(s) \\ \Leftrightarrow \min_{s \in [a, b]} f(\gamma(s)) &\leq f(\gamma(t)) \leq \max_{s \in [a, b]} f(\gamma(s)) \\ \Leftrightarrow \min_{s \in [a, b]} f(\gamma(s)) \|\dot{\gamma}(t)\| &\leq f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \leq \max_{s \in [a, b]} f(\gamma(s)) \|\dot{\gamma}(t)\| \\ \Leftrightarrow \min_{s \in [a, b]} f(\gamma(s)) \text{long}(\Gamma) &\leq \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq \max_{s \in [a, b]} f(\gamma(s)) \text{long}(\Gamma) \\ \Leftrightarrow \min_{s \in [a, b]} f(\gamma(s)) &\leq \frac{1}{\text{long}(\Gamma)} \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq \max_{s \in [a, b]} f(\gamma(s)). \end{aligned}$$

Par le théorème de la valeur intermédiaire appliqué à $g = f \circ \gamma$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(\gamma(c)) = \frac{1}{\text{long}(\Gamma)} \int_{\Gamma} f dl.$$

Exercice 2. Différentiation de Lebesgue - Preuve alternative

Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. Soient $x_0 \in \Omega$ et $\Gamma \subset \Omega$ une courbe simple et régulière, paramétrée par $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ une paramétrisation simple et régulière de Γ telle que $\gamma(a) = x_0$.

On considère pour $t \in]a, b]$ la courbe $\Gamma_t \subset \Gamma$ définie par le morceau de courbe de Γ allant de $\gamma(a)$ à $\gamma(t)$. Finalement, on définit la fonction $g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(t) = \frac{1}{\text{long}(\Gamma_t)} \int_{\Gamma_t} f dl.$$

Montrer en utilisant le théorème de la moyenne que

$$\lim_{t \rightarrow a^+} g(t) = f(x_0).$$

Correction.

On a $g(t) = \frac{1}{\text{long}(\Gamma)} \int_{\Gamma_t} f dl$. Par le théorème de la moyenne, il existe $c \in [a, t]$ tel que $g(t) = f(\gamma(c))$. Or $f \circ \gamma \in \mathcal{C}^0([a, b])$, donc si $t \rightarrow a^+$, comme $c \rightarrow a^+$, on a

$$\lim_{t \rightarrow a^+} g(t) = f(\gamma(a)) = f(x_0).$$

Exercice 3. Facultatif - Théorème de la divergence sur un pavé

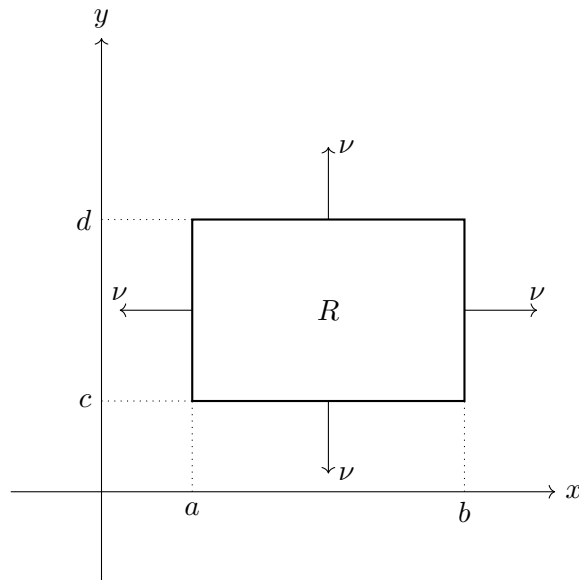
Soient $R = [a, b] \times [c, d] \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ avec Ω ouvert et $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. On définit la divergence de $F = (f_1, f_2)$ par

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}.$$

Montrer que

$$\iint_R \nabla \cdot F \, dx dy = \int_{\partial R} \langle F, \nu \rangle dl,$$

où, pour un côté du rectangle R , ν désigne le vecteur normal pointant vers l'extérieur.



Correction.

D'une part

$$\begin{aligned} \iint_R \nabla \cdot F \, dx dy &= \int_a^b \int_c^d \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dy dx \\ &= \int_a^b \int_c^d \frac{\partial f_1}{\partial x} dy dx + \int_a^b \int_c^d \frac{\partial f_2}{\partial y} dy dx \\ &= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial f_1}{\partial x} dx dy + \int_a^b (f_2(x, d) - f_2(x, c)) dx \\ &= \int_c^d (f_1(b, y) - f_1(a, y)) dy + \int_a^b (f_2(x, d) - f_2(x, c)) dx. \end{aligned}$$

D'autre part, on cherche à calculer $\int_{\partial R} \langle F, \nu \rangle dl$. Notons $A = (a, c)$, $B = (b, c)$, $C = (b, d)$, $D = (a, d)$.

On a ainsi

$$\int_{\partial R} \langle F, \nu \rangle dl = \int_{[A,B]} \langle F, \nu \rangle dl + \int_{[B,C]} \langle F, \nu \rangle dl + \int_{[C,D]} \langle F, \nu \rangle dl + \int_{[D,A]} \langle F, \nu \rangle dl.$$

De plus,

$$\nu = \begin{cases} (0, -1) & \text{sur } [A, B], \\ (1, 0) & \text{sur } [B, C], \\ (0, 1) & \text{sur } [C, D], \\ (-1, 0) & \text{sur } [D, A]. \end{cases}$$

D'où

$$\int_{\partial R} \langle F, \nu \rangle dl = \int_{[A,B]} -f_2 dl + \int_{[B,C]} f_1 dl + \int_{[C,D]} f_2 dl + \int_{[D,A]} -f_1 dl.$$

Les segments peuvent être paramétrisés comme

$$\begin{aligned} [A, B] &= \{(x, c) | x \in [a, b]\}, \\ [B, C] &= \{(b, y) | y \in [c, d]\}, \\ [C, D] &= \{(x, d) | x \in [a, b]\}, \\ [D, A] &= \{(a, y) | y \in [c, d]\}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{[A,B]} -f_2 dl &= - \int_a^b f_2(x, c) dx, \\ \int_{[B,C]} f_1 dl &= \int_c^d f_1(b, y) dy, \\ \int_{[C,D]} f_2 dl &= \int_a^b f_2(x, d) dx, \\ \int_{[D,A]} -f_1 dl &= - \int_c^d f_1(a, y) dy. \end{aligned}$$

On retrouve donc

$$\iint_R \nabla \cdot F \, dx dy = \int_{\partial R} \langle F, \nu \rangle dl.$$

Exercice 4. Facultatif - Formule de Green-Riemann

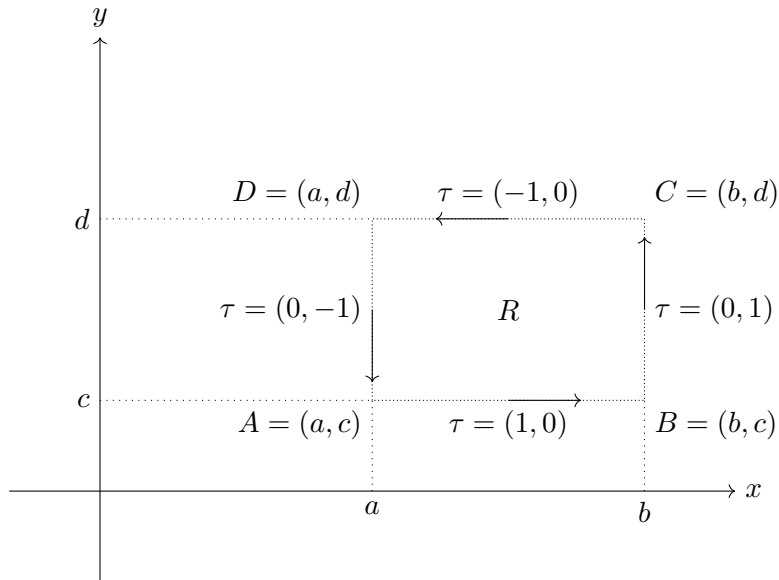
Soient $R = [a, b] \times [c, d] \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ avec Ω ouvert et $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. On définit le rotationnel (en deux dimensions) de $F = (f_1, f_2)$ comme

$$\nabla \wedge F = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

Montrer que

$$\iint_R \nabla \wedge F \, dx dy = \int_{\partial R} \langle F, \tau \rangle dl,$$

où pour un côté du rectangle R , τ est le vecteur unitaire directeur de ce côté et orienté avec la convention que l'on parcourt le bord du rectangle dans le sens trigonométrique, comme représenté sur le schéma ci-dessous.



Correction.

D'une part,

$$\begin{aligned}
 \iint_R \nabla \wedge F \, dx dy &= \int_a^b \int_c^d \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial f_2}{\partial x} dx dy - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial f_1}{\partial y} dx dy \\
 &= \int_c^d (f_2(b, y) - f_2(a, y)) dy - \int_a^b (f_1(x, d) - f_1(x, c)) dx.
 \end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_{\partial R} \langle F, \tau \rangle dl = \int_{[A,B]} \langle F, \tau \rangle dl + \int_{[B,C]} \langle F, \tau \rangle dl + \int_{[C,D]} \langle F, \tau \rangle dl + \int_{[D,A]} \langle F, \tau \rangle dl,$$

avec la paramétrisation

$$\begin{aligned}
 [A, B] &= \{(x, c) | x \in [a, b]\}, \\
 [B, C] &= \{(b, y) | y \in [c, d]\}, \\
 [C, D] &= \{(x, d) | x \in [a, b]\}, \\
 [D, A] &= \{(a, y) | y \in [c, d]\},
 \end{aligned}$$

et

$$\tau = \begin{cases} (1, 0) & \text{sur } [A, B], \\ (0, 1) & \text{sur } [B, C], \\ (-1, 0) & \text{sur } [C, D], \\ (0, -1) & \text{sur } [D, A]. \end{cases}$$

On obtient

$$\int_{\partial R} \langle F, \tau \rangle dl = \int_a^b f_1(x, c) dx + \int_c^d f_2(b, y) dy - \int_a^b f_1(x, d) dx - \int_c^d f_2(a, y) dy.$$

On a ainsi montré que

$$\iint_R \nabla \wedge F \, dx dy = \int_{\partial R} \langle F, \tau \rangle dl.$$

Exercice 5. Facultatif - Intégration sur un domaine non borné

Sous certaines conditions sur $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$, on peut poser la définition

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \iint_{D_N} f(x, y) dx dy,$$

où $D_N = \overline{B}((0, 0), N)$ est le disque de rayon N et centré à l'origine.

En calculant

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy,$$

déduire la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Correction.

D'une part, par un passage en coordonnées polaires, on a

$$\iint_{D_N} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^N e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^N = \pi (1 - e^{-N^2}) \rightarrow \pi$$

pour $N \rightarrow \infty$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 6. Révisions - Longueur d'une courbe paramétrée

Soit Γ la courbe paramétrée par $\gamma(t) = (t \sin(t), t \cos(t))$, $t \in [0, 1]$.

Calculer $\text{long}(\Gamma)$.

Indication : on pourra utiliser que $\cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x)+1}{2}$.

Correction.

On calcule $\dot{\gamma}(t) = (\sin(t) + t \cos(t), \cos(t) - t \sin(t))$. On a

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = (\sin(t) + t \cos(t))^2 + (\cos(t) - t \sin(t))^2 = 1 + t^2.$$

D'où

$$\begin{aligned} \text{long}(\Gamma) &= \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt \stackrel{t=\sinh(u)}{=} \int_0^{\text{argsinh}(1)} \cosh^2(u) du = \int_0^{\text{argsinh}(1)} \frac{\cosh(2u)+1}{2} du \\ &= \left[\frac{1}{4} \sinh(2u) + \frac{1}{2} u \right]_0^{\text{argsinh}(1)} = \left[\frac{1}{2} \sinh(u) \cosh(u) + \frac{1}{2} u \right]_0^{\text{argsinh}(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \text{argsinh}(1) \end{aligned}$$

où on a utilisé que

$$\cosh(\text{argsinh}(x)) = \sqrt{1+x^2}.$$

Exercice 7. Révisions - Dérivée d'une intégrale dépendante d'un paramètre

On donne $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \int_t^{\pi t} \frac{\cos(x^2 t)}{x} dx.$$

Calculer $F'(t)$.

Correction.

On utilise la formule pour calculer :

$$F'(t) = (\pi t)' \frac{\cos((\pi t)^2 \cdot t)}{\pi t} - (t)' \frac{\cos(t^2 \cdot t)}{t} + \int_t^{\pi t} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\cos(x^2 t)}{x} dx$$

ce qui donne

$$F'(t) = \frac{\cos(\pi^2 t^3)}{t} - \frac{\cos(t^3)}{t} + \int_t^{\pi t} \frac{-\sin(x^2 t)}{x} x^2 dx = \frac{\cos(\pi^2 t^3)}{t} - \frac{\cos(t^3)}{t} + \int_{x=t}^{x=\pi t} -\sin(x^2 t) x dx.$$

D'où

$$F'(t) = \frac{\cos(\pi^2 t^3)}{t} - \frac{\cos(t^3)}{t} + \frac{\cos(x^2 t)}{2t} \Big|_t^{\pi t} = \frac{3 \cos(\pi^2 t^3)}{2t} - \frac{3 \cos(t^3)}{2t}.$$

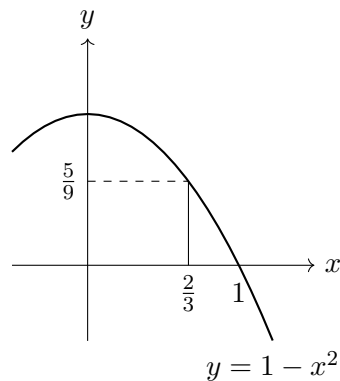
Exercice 8. Révisions - Inversion des bornes dans une intégrale double

Calculer

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 \int_0^{1-x^2} \frac{18}{5} x e^{\frac{9}{10} y^2 - y} dy dx.$$

Correction.

L'intégrale est sur le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2}{3} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$. On esquisse tout d'abord le domaine



Comme pour $x \geq 0$, $y = 1 - x^2$ est équivalent à $x = \sqrt{1 - y}$, on peut réécrire le domaine comme

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{5}{9}, \frac{2}{3} \leq x \leq \sqrt{1 - y} \right\}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{2}{3}}^1 \int_0^{1-x^2} \frac{18}{5} x e^{\frac{9}{10}y^2-y} dy dx &= \int_0^{\frac{5}{9}} \int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{1-y}} \frac{18}{5} x e^{\frac{9}{10}y^2-y} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{5}{9}} e^{\frac{9}{10}y^2-y} \left[\frac{9}{5} x^2 \right]_{x=\frac{2}{3}}^{x=\sqrt{1-y}} dy \\ &= \int_0^{\frac{5}{9}} e^{\frac{9}{10}y^2-y} \left(\frac{9}{5}(1-y) - \frac{4}{5} \right) dy \\ &= \int_0^{\frac{5}{9}} e^{\frac{9}{10}y^2-y} \left(-\frac{9}{5}y + 1 \right) dy.\end{aligned}$$

En observant que

$$\left(\frac{9}{10}y^2 - y \right)' = \frac{9}{5}y - 1,$$

on arrive à

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 \int_0^{1-x^2} \frac{18}{5} x e^{\frac{9}{10}y^2-y} dy dx = \left[-e^{\frac{9}{10}y^2-y} \right]_{y=0}^{y=\frac{5}{9}} = -e^{\frac{5}{18}-\frac{5}{9}} + 1 = 1 - e^{-\frac{5}{18}}.$$