

Exercice 1. Théorème de la moyenne sur des courbes

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $\Gamma \subset \Omega$ une courbe simple et régulière telle que $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ est une paramétrisation simple et régulière de Γ .

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(\gamma(c)) = \frac{1}{\text{long}(\Gamma)} \int_{\Gamma} f dl.$$

Exercice 2. Différentiation de Lebesgue - Preuve alternative

Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. Soient $x_0 \in \Omega$ et $\Gamma \subset \Omega$ une courbe simple et régulière, paramétrée par $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ une paramétrisation simple et régulière de Γ telle que $\gamma(a) = x_0$.

On considère pour $t \in]a, b]$ la courbe $\Gamma_t \subset \Gamma$ définie par le morceau de courbe de Γ allant de $\gamma(a)$ à $\gamma(t)$. Finalement, on définit la fonction $g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(t) = \frac{1}{\text{long}(\Gamma_t)} \int_{\Gamma_t} f dl.$$

Montrer en utilisant le théorème de la moyenne que

$$\lim_{t \rightarrow a^+} g(t) = f(x_0).$$

Exercice 3. Facultatif - Théorème de la divergence sur un pavé

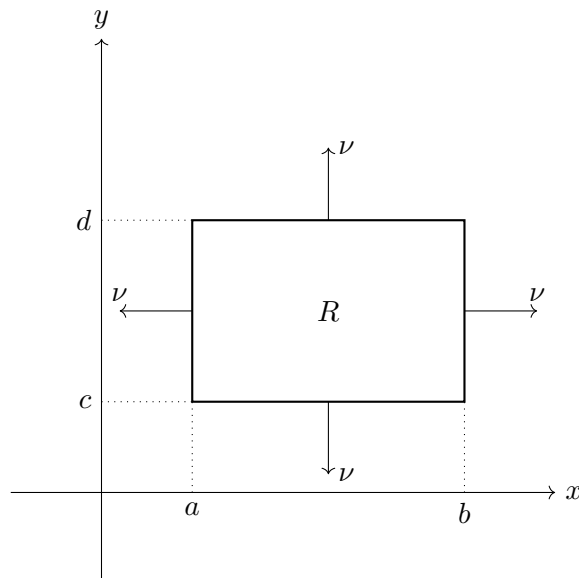
Soient $R = [a, b] \times [c, d] \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ avec Ω ouvert et $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. On définit la divergence de $F = (f_1, f_2)$ par

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}.$$

Montrer que

$$\iint_R \nabla \cdot F \, dx dy = \int_{\partial R} \langle F, \nu \rangle dl,$$

où, pour un côté du rectangle R , ν désigne le vecteur normal pointant vers l'extérieur.



Exercice 4. Facultatif - Formule de Green-Riemann

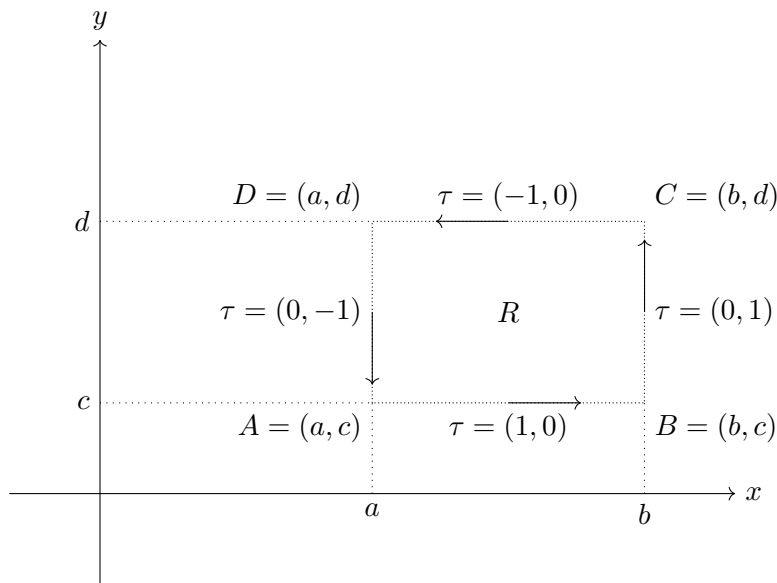
Soient $R = [a, b] \times [c, d] \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ avec Ω ouvert et $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. On définit le rotationnel (en deux dimensions) de $F = (f_1, f_2)$ comme

$$\nabla \wedge F = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

Montrer que

$$\iint_R \nabla \wedge F \, dx dy = \int_{\partial R} \langle F, \tau \rangle dl,$$

où pour un côté du rectangle R , τ est le vecteur unitaire directeur de ce côté et orienté avec la convention que l'on parcourt le bord du rectangle dans le sens trigonométrique, comme représenté sur le schéma ci-dessous.



Exercice 5. Facultatif - Intégration sur un domaine non borné

Sous certaines conditions sur $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$, on peut poser la définition

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \iint_{D_N} f(x, y) dx dy,$$

où $D_N = \overline{B}((0, 0), N)$ est le disque de rayon N et centré à l'origine.

En calculant

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy,$$

déduire la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Exercice 6. Longueur d'une courbe paramétrée

Soit Γ la courbe paramétrée par $\gamma(t) = (t \sin(t), t \cos(t)), t \in [0, 1]$.

Calculer $\text{long}(\Gamma)$.

Indication : on pourra utiliser que $\cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x)+1}{2}$.

Exercice 7. Dérivée d'une intégrale dépendante d'un paramètre

On donne $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \int_t^{\pi t} \frac{\cos(x^2 t)}{x} dx.$$

Calculer $F'(t)$.

Exercice 8. Inversion des bornes dans une intégrale double

Calculer

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 \int_0^{1-x^2} \frac{18}{5} x e^{\frac{9}{10}y^2 - y} dy dx.$$

Réponses

Exercice 6.

$$\text{long}(\Gamma) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Exercice 7.

$$F'(t) = \frac{3}{2t} (\cos(\pi^2 t^3) - \cos(t^3)).$$

Exercice 8.

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 \int_0^{1-x^2} \frac{18}{5} x e^{\frac{9}{10}y^2-y} dy dx = 1 - e^{-5/18}.$$