

Exercice 1. Dérivées d'intégrales paramétriques

a) Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \int_0^{t^2} e^{te^x} dx.$$

Calculer $F'(1)$.

b) Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \int_{\sin(t)}^{\cos(t)} e^{t^2 x^2} dx.$$

Calculer $F'(\frac{\pi}{4})$.

Correction.

On rappelle la formule vue en cours pour $F(t) = \int_{g(t)}^{h(t)} f(x, t) dx$:

$$F'(t) = h'(t)f(h(t), t) - g'(t)f(g(t), t) + \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

a) On a

$$\begin{aligned} F'(t) &= 2te^{te^{t^2}} - 0e^{te^0} + \int_0^{t^2} e^x e^{te^x} dx \\ &= 2te^{te^{t^2}} + \left[\frac{1}{t} e^{te^x} \right]_{x=0}^{x=t^2} \\ &= 2te^{te^{t^2}} + \frac{1}{t} e^{te^{t^2}} - \frac{1}{t} e^t \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F'(1) = 2e^e + e^e - e = 3e^e - e$$

b) On a

$$F'(t) = -\sin(t)e^{t^2 \cos^2(t)} - \cos(t)e^{t^2 \sin^2(t)} + \int_{\sin(t)}^{\cos(t)} 2tx^2 e^{t^2 x^2} dx.$$

Ainsi, vu que $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\begin{aligned} F'(\frac{\pi}{4}) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi^2}{16} \frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi^2}{16} \frac{1}{2}} + \underbrace{\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2tx^2 e^{t^2 x^2} dx}_{=0} \\ &= -\sqrt{2} e^{\frac{\pi^2}{32}}. \end{aligned}$$

Exercice 2. Intégrale double

Soit $D = [0, 1] \times [0, \pi/2]$. Calculer

$$\iint_D \frac{x \sin y}{1+x^2} dx dy.$$

Correction.

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x \sin y}{1+x^2} dx dy &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \cdot \int_0^{\pi/2} \sin y dy \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 \cdot (-\cos y) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\ln 2}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 3. Intégrale double

Soit $D = [0, 1] \times [1, 2]$. Calculer

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2} dx dy.$$

Correction.

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2} dx dy = \int_1^2 \left(\int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2} dx \right) dy.$$

On calcule

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln(x^2+y^2) dx = \frac{1}{2} (\ln(1+y^2) - \ln y^2).$$

D'où on intègre à présent :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_1^2 \ln(1+y^2) - \ln y^2 dy &= \frac{1}{2} \int_1^2 \ln(1+y^2) dy - \frac{1}{2} \int_1^2 \ln(y^2) dy \\ &= \frac{y \ln(1+y^2)}{2} \Big|_{y=1}^{y=2} - \int_1^2 \frac{y^2}{1+y^2} dy - \frac{1}{2} \int_1^2 \ln(y^2) dy \\ &= \frac{y \ln(1+y^2)}{2} \Big|_{y=1}^{y=2} - \int_1^2 \frac{y^2+1-1}{1+y^2} dy - \frac{1}{2} \int_1^2 2 \ln(y) dy \\ &= \frac{y \ln(1+y^2)}{2} \Big|_{y=1}^{y=2} - \int_1^2 1 dy + \int_1^2 \frac{1}{1+y^2} dy - \frac{1}{2} \int_1^2 2 \ln(y) dy \\ &= \frac{y \ln(1+y^2)}{2} - y + \arctan y \Big|_{y=1}^{y=2} + (y - y \ln y) \Big|_{y=1}^{y=2}\end{aligned}$$

Finalement, en évaluant et utilisant $\arctan 1 = \pi/4$:

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2} dx dy = \arctan 2 + \ln 5 - \frac{5 \ln 2}{2} - \frac{\pi}{4}$$

Exercice 4. Intégrale double

Soit $D = [0, \pi] \times [0, 1]$. Calculer

$$\iint_D x \sin xy dx dy.$$

Correction.

$$\begin{aligned}
\iint_D x \sin xy \, dx dy &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 x \sin xy \, dy \right) dx \\
&= \int_0^\pi (-\cos xy) \Big|_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^\pi (1 - \cos x) dx \\
&= (x - \sin x) \Big|_0^\pi = \pi
\end{aligned}$$

Exercice 5. Intégrale double

Calculer $\iint_D ye^x dx dy$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est le domaine donné par

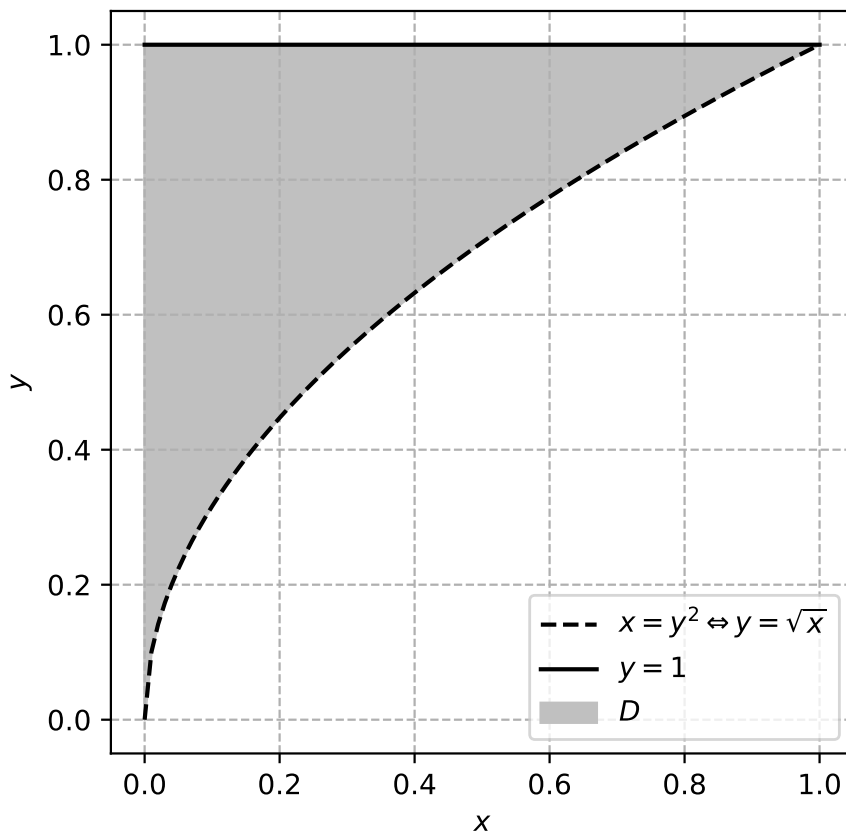
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, y \leq 1 \text{ et } x \leq y^2\}$$

- a) en intégrant d'abord par rapport à x et ensuite par rapport à y ,
- b) en intégrant d'abord par rapport à y et ensuite par rapport à x .

Indication : esquisser tout d'abord le domaine.

Correction.

On esquisse le domaine comme ci-dessous :



a) Pour $0 \leq y \leq 1$ fixé, x varie entre 0 et y^2 et nous avons

$$\begin{aligned} \iint_D ye^x dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} e^x dx \right) y dy = \int_0^1 [e^x]_0^{y^2} y dy \\ &= \int_0^1 (e^{y^2} - 1) y dy = \frac{1}{2} [e^{y^2} - y^2]_0^1 = \frac{e}{2} - 1. \end{aligned}$$

b) Pour $0 \leq x \leq 1$ fixé, y varie entre \sqrt{x} et 1 et nous avons

$$\begin{aligned} \iint_D ye^x dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 y dy \right) e^x dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\sqrt{x}}^1 e^x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x) e^x dx \\ &= \frac{1}{2} [(1 - x)e^x + e^x]_0^1 = \frac{e}{2} - 1. \end{aligned}$$

Exercice 6. Intégrale double

Calculer $\iint_D (\sqrt{x} - y^2) dx dy$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est le domaine donné par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, y \geq x^2 \text{ et } y^4 \leq x\}.$$

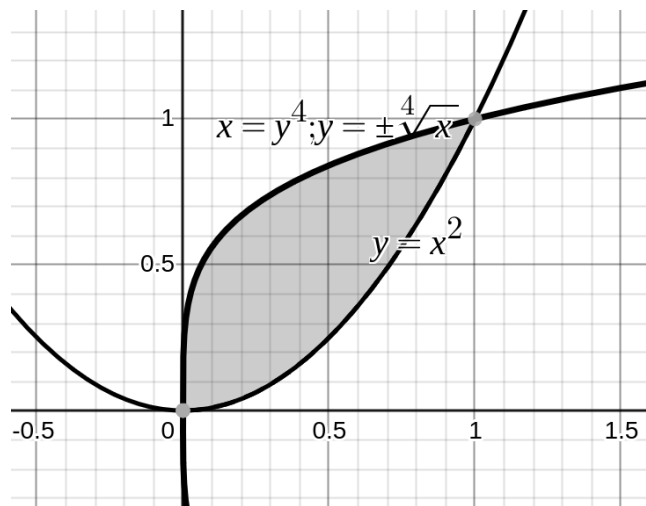
a) en intégrant d'abord par rapport à x et ensuite par rapport à y ,

b) en intégrant d'abord par rapport à y et ensuite par rapport à x .

Indication : esquisser tout d'abord le domaine.

Correction.

On esquisse le domaine comme ci-dessous :



a) Pour $0 \leq y \leq 1$ fixé, x varie entre y^4 et $y^{1/2}$ et nous avons

$$\begin{aligned}
\iint_D (\sqrt{x} - y^2) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{y^4}^{y^{1/2}} (\sqrt{x} - y^2) dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - y^2 x \right]_{y^4}^{y^{1/2}} dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} y^{3/4} - y^{5/2} + \frac{1}{3} y^6 \right) dy \\
&= \left[\frac{8}{21} y^{7/4} - \frac{2}{7} y^{7/2} + \frac{1}{21} y^7 \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{7}.
\end{aligned}$$

b) Pour $0 \leq x \leq 1$ fixé, y varie entre x^2 et $x^{1/4}$ et nous avons

$$\begin{aligned}
\iint_D (\sqrt{x} - y^2) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x^{1/4}} (\sqrt{x} - y^2) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[x^{1/2} y - \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{x^{1/4}} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} x^{3/4} - x^{5/2} + \frac{1}{3} x^6 \right) dx \\
&= \frac{1}{7}.
\end{aligned}$$

Exercice 7. Intégrale double

Calculer l'intégrale double suivante en inversant l'ordre d'intégration :

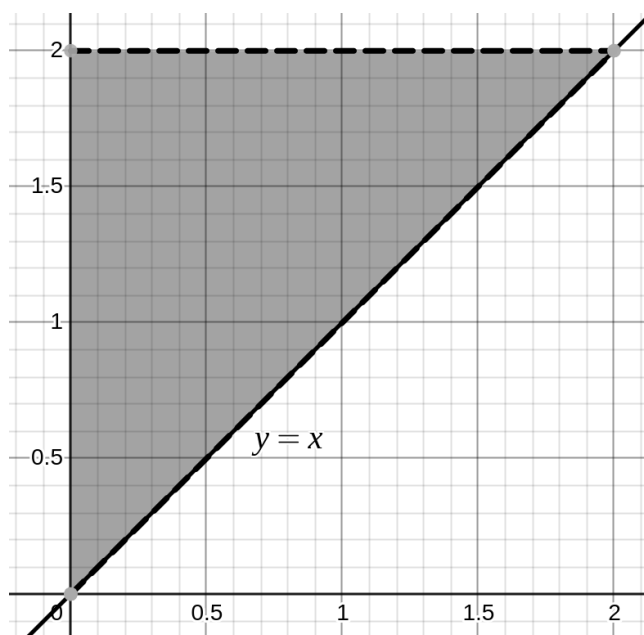
$$\int_0^2 \left(\int_x^2 2y^2 \sin(xy) dy \right) dx.$$

Rappel : on a vu dans les exemples du cours que certaines intégrales doubles sont plus évidentes si on intègre dans le bon ordre. Dans le cas où les bornes dépendent d'une variable, on doit récrire ces dernières en fonction de l'autre variable avant d'échanger l'ordre des intégrales.

Indication : esquisser tout d'abord le domaine d'intégration.

Correction.

On esquisse le domaine :



Pour $0 \leq x \leq 2$ fixé, y varie entre $y = x$ et $y = 2$. Par conséquent, pour $0 \leq y \leq 2$ fixé, x varie entre 0 et y . L'échange des bornes d'intégration nous donne alors

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\int_x^2 2y^2 \sin(xy) dy \right) dx &= \int_0^2 \left(\int_0^y 2y^2 \sin(xy) dx \right) dy \\ &= \int_0^2 2y \left(\int_0^y y \sin(xy) dx \right) dy \\ &= \int_0^2 2y [-\cos(xy)]_0^y dy = \int_0^2 2y(1 - \cos(y^2)) dy \\ &= [y^2 - \sin(y^2)]_0^2 = 4 - \sin 4. \end{aligned}$$

Exercice 8. Calcul de volume

Soient $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$ et $f(x, y) = \max(1 - |x|, 1 - |y|)$. Calculer le volume de

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D : \text{et } 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Indication : observer la parité des fonctions $1 - |x|$ et $1 - |y|$.

Correction.

Le volume de E est donné par

$$\text{Vol}(E) = \iint_{[-1,1] \times [-1,1]} f(x, y) \, dx dy.$$

Par parité des fonctions $1 - |x|$ et $1 - |y|$, on a

$$\text{Vol}(E) = 4 \iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) \, dx dy.$$

Dans le domaine $[0, 1] \times [0, 1]$, on a $f(x, y) = \max(1 - |x|, 1 - |y|) = \max(1 - x, 1 - y)$. Or

$$1 - x \geq 1 - y \iff x \leq y.$$

Donc, en intégrant d'abord par rapport à x (on fixe y et on fait varier x):

$$\begin{aligned} \text{Vol}(E) &= 4 \int_0^1 \left(\int_0^y 1 - x \, dx + \int_y^1 1 - y \, dx \right) dy \\ &= 4 \int_0^1 y - \frac{y^2}{2} + (1 - y)^2 \, dy \\ &= 4 \int_0^1 1 - y + \frac{y^2}{2} \, dy \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

La figure 1 donne une illustration de la surface. On calcule le volume entre $z = 0$ et $z = f(x, y)$.

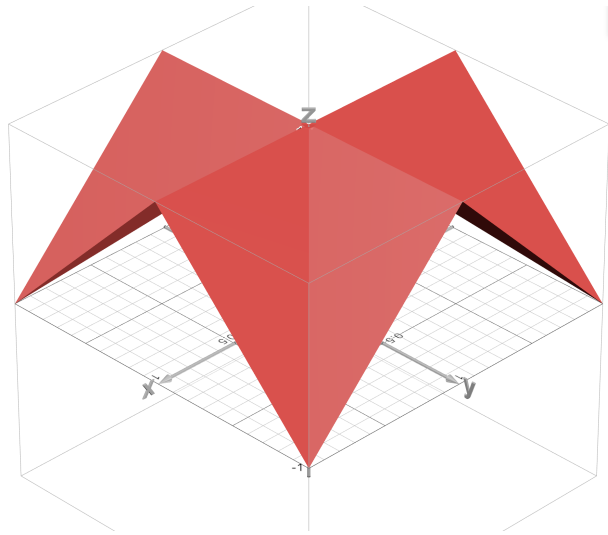


Figure 1: Surface $z = f(x, y)$ pour $(x, y) \in [0, 1]^2$.

Exercice 9. Calcul de volume

Soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Calculer le volume de

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ et } 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

En déduire le volume de la boule de rayon 1 dans \mathbb{R}^3 .

Indication : décrire la partie supérieure et inférieure de ∂D comme un graphe de fonction. On pourra ensuite utiliser la formule

$$\int \sqrt{a^2 - t^2} dt = \frac{t}{2} \sqrt{a^2 - t^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{t}{a}, \quad a > 0, |t| < |a|$$

Correction.

Le volume de E est donné par

$$\text{Vol}(E) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

On décrit D comme

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \right\}.$$

En appliquant la formule

$$\int \sqrt{a^2 - t^2} dt = \frac{t}{2} \sqrt{a^2 - t^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{t}{a}, \quad a > 0, |t| < |a|$$

avec $a = \sqrt{1 - x^2}$ nous avons

$$\begin{aligned} \text{Vol}(E) &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{y}{2} \sqrt{1-x^2-y^2} + \frac{1-x^2}{2} \arcsin \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \Big|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{2} (\arcsin 1 - \arcsin(-1)) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 1-x^2 dx \\ &= \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

On a en fait calculé le volume de la demi-boule de rayon 1. Le volume complet de la boule est donc donné par

$$\frac{4\pi}{3}.$$

Exercice 10. Intégrale triple

Calculer

$$\iiint_{[0,1] \times [2,3] \times [4,5]} x + y + z + xyz \, dx dy dz.$$

Correction.

$$\begin{aligned} \iiint_{[0,1] \times [2,3] \times [4,5]} x \, dx dy dz &= \iint_{[2,3] \times [4,5]} \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \, dy dz \\ &= \iint_{[2,3] \times [4,5]} \frac{1}{2} \, dy dz = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{[0,1] \times [2,3] \times [4,5]} y \, dx dy dz &= \iint_{[2,3] \times [4,5]} y \, dy dz \\ &= \int_{[4,5]} \frac{y^2}{2} \Big|_2^3 \, dz = \int_{[4,5]} \frac{5}{2} \, dz = \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

et de la même manière

$$\iiint_{[0,1] \times [2,3] \times [4,5]} z \, dx dy dz = \frac{9}{2}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \iiint_{[0,1] \times [2,3] \times [4,5]} xyz \, dx dy dz &= \iint_{[2,3] \times [4,5]} \frac{yz}{2} \, dy dz \\ &= \int_{[4,5]} \frac{5z}{4} \, dz = \frac{45}{8}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\iiint_{[0,1] \times [2,3] \times [4,5]} x + y + z + xyz \, dx dy dz = \frac{105}{8}.$$

Exercice 11. Propriétés de l'intégration

Dire si les propriétés ci-dessous sont vraies ou fausses.

a) Pour tout domaine $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$ tels que $D_1 \subset D_2$, on a

$$\iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy \leq \iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy.$$

b) Pour tout domaine $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$ tels que $D_1 \subset D_2$,

$$f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D_2 \Rightarrow \iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy \leq \iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy.$$

Correction.

a) C'est faux. Prenons par exemple le cas d'une fonction positive dans D_1 et négative dans $D_2 \setminus D_1$.

b) C'est vrai. Comme f est positive, le volume géométrique sous le graphe de f ne fait que grandir si on augmente le domaine.