Exercice 1. Dérivées d'intégrales paramétriques

a) Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$F(t) = \int_0^{t^2} e^{te^x} \mathrm{d}x.$$
Calculer $F'(1)$.

b) Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$F(t) = \int_{\sin(t)}^{\cos(t)} e^{t^2x^2} \mathrm{d}x.$$
Calculer $F'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 2. Intégrale double
Soit $D = [0, 1] \times [0, \pi/2]$. Calculer
$$\iint_D \frac{x \sin y}{1 + x^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exercice 3. Intégrale double
Soit $D = [0, 1] \times [1, 2]$. Calculer
$$\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exercice 4. Intégrale double
Soit $D = [0, \pi] \times [0, 1]$. Calculer
$$\iint_D x \sin xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exercice 5. Intégrale double
Calculer $\iint_D ye^x \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est le domaine donné par
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geq 0, y \leq 1 \text{ et } x \leq y^2\right\}$$

a) en intégrant d'abord par rapport à x et ensuite par rapport à y,

b) en intégrant d'abord par rapport à y et ensuite par rapport à x.

Indication : esquisser tout d'abord le domaine.

Exercice 6. Intégrale double
Calculer $\iint_D (\sqrt{x} - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est le domaine donné par
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geq 0, y \geq x^2 \text{ et } y^4 \leq x\right\}.$$

a) en intégrant d'abord par rapport à x et ensuite par rapport à y,

b) en intégrant d'abord par rapport à y et ensuite par rapport à x.

Indication : esquisser tout d'abord le domaine.

Exercice 7. Intégrale double

Calculer l'intégrale double suivante en inversant l'ordre d'intégration :

$$\int_0^2 \left(\int_x^2 2y^2 \sin(xy) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \,.$$

Rappel : on a vu dans les exemples du cours que certaines intégrales doubles sont plus évidentes si on intègre dans le bon ordre. Dans le cas où les bornes dépendent d'une variable, on doit récrire ces dernières en fonction de l'autre variable avant d'échanger l'ordre des intégrales.

Indication : esquisser tout d'abord le domaine d'intégration.

Exercice 8. Calcul de volume

Soient $D = [-1,1] \times [-1,1]$ et $f(x,y) = \max(1-|x|, 1-|y|)$. Calculer le volume de

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D : \text{ et } 0 \leq z \leq f(x,y)\}.$$

Indication : observer la parité des fonctions $1-|x|$ *et* $1-|y|$.

Exercice 9. Calcul de volume

Soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ et $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Calculer le volume de

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D : \text{ et } 0 \leq z \leq f(x,y)\}.$$

En déduire le volume de la boule de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$.

Indication : décrire la partie supérieure et inférieure de ∂D *comme un graphe de fonction. On pourra ensuite utiliser la formule*

$$\int \sqrt{a^2-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\sqrt{a^2-t^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{t}{a},\ a>0,\ |t|<|a|$$

Exercice 10. Intégrale triple

Calculer

$$\iiint_{[0,1]\times[2,3]\times[4,5]} x+y+z+xyz \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Exercice 11. Propriétés de l'intégration

Dire si les propriétés ci-dessous sont vraies ou fausses.

a) Pour tout domaine $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$ tels que $D_1 \subset D_2$, on a

$$\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

b) Pour tout domaine $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$ tels que $D_1 \subset D_2$,

$$f(x,y) \geq 0, \forall (x,y) \in D_2 \Rightarrow \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Réponses

Exercice 1.

a) $F'(1) = 3e^e - e$.

b) $F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}e^{\pi^2/32}$

Exercice 2.

$$\iint_D \frac{x \sin y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\ln 2$$

Exercice 3.

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \ln 5 - \frac{5}{2}\ln 2 + \arctan 2 - \frac{\pi}{4}$$

Exercice 4.

$$\iint_D x \sin xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi$$

Exercice 5.

$$\iint_D ye^x \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{e}{2} - 1$$

Exercice 6.

$$\iint_D (\sqrt{x} - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{7}$$

Exercice 7.

$$\int_0^2 \left(\int_x^2 2y^2 \sin(xy)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 4 - \sin 4$$

Exercice 8.

$$\mathrm{Vol}(E) = \frac{8}{3}$$

Exercice 9.

$$\mathrm{Vol}(E) = \frac{2\pi}{3},$$

et le volume de la boule de rayon 1 est

$$\frac{4\pi}{3}.$$

Exercice 10.

$$\iiint_{[0,1]\times[2,3]\times[4,5]} x + y + z + xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{105}{8}.$$

Exercice 11.

a) Faux.

b) Vrai.