

Exercice 1. Intégrale curviligne

Soit $f(x, y) = xy$. Calculer les intégrales curvilignes $\int_{\Gamma_i} f dl$ pour les courbes

- a) $\Gamma_1 = \{(t, t) | t \in [0, 1]\}$,
- b) $\Gamma_2 = \{(t, t^2) | t \in [0, 1]\}$,
- c) $\Gamma_3 = \{(\cos t, \sin t) | t \in [0, 2\pi]\}$,
- d) $\Gamma_4 = \{(t, \cosh t) | t \in [0, 1]\}$.

Correction.

a) Soit $\gamma_1(t) = (t, t)$. On a,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} f dl &= \int_0^1 f(\gamma_1(t)) \|\dot{\gamma}_1(t)\| dt = \int_0^1 tt\sqrt{2} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

b) Soit $\gamma_2(t) = (t, t^2)$. On a

$$\int_{\Gamma_2} f dl = \int_0^1 f(\gamma_2(t)) \|\dot{\gamma}_2(t)\| dt = \int_0^1 t^3 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \int_0^1 t^2 \sqrt{1 + 4t^2} t dt.$$

On introduit le changement de variable $u = 1 + 4t^2 \Leftrightarrow t^2 = (u - 1)/4, du = 8t dt$. On a $u(t = 0) = 1$ et $u(t = 1) = 5$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^2 \sqrt{1 + 4t^2} t dt &= \int_1^5 \frac{1}{4}(u - 1) \sqrt{u} \frac{1}{8} du = \frac{1}{32} \int_1^5 (u^{3/2} - u^{1/2}) du \\ &= \frac{1}{32} \left[\frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^5 = \dots = \frac{1}{120} (25\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

c) Soit $\gamma_3(t) = (\cos t, \sin t)$. On a

$$\int_{\Gamma_3} f dl = \int_0^{2\pi} f(\gamma_3(t)) \|\dot{\gamma}_3(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2t) dt = \frac{1}{4} [-\cos(2t)]_0^{2\pi} = 0.$$

d) Soit $\gamma_4(t) = (t, \cosh t)$. On a

$$\int_{\Gamma_4} f dl = \int_0^1 f(\gamma_4(t)) \|\dot{\gamma}_4(t)\| dt = \int_0^1 t \cosh t \sqrt{1 + \sinh^2 t} dt = \int_0^1 t \cosh^2 t dt.$$

On intègre par parties, en posant

$$\begin{array}{rcl} u(t) = t & \begin{array}{l} + \\ - \\ + \int \end{array} & v''(t) = \cosh^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cosh(2t)) \\ u'(t) = 1 & & v'(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sinh(2t) \\ u''(t) = 0 & & v(t) = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8} \cosh(2t) \end{array}$$

Pour celles et ceux qui verraient cette technique d'intégration par parties pour la première fois, il s'agit de l'intégration par parties tabulaire, qui revient à appliquer successivement la formule d'intégration par parties. On utilise alors cette formule

$$\int_a^b u(x)v^{(n)}(x)dx = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k-1)} \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)}(x)v(x)dx.$$

Dans notre cas précis, on écrit

$$\int_0^1 u(t)v''(t)dt = [u(t)v'(t) - u'(t)v(t)]_0^1 + \int_0^1 u''(t)v(t)dt.$$

L'avantage ici est que l'on a déjà calculé la dernière intégrale, comme $u''(t) = 0$. De manière générale, cette technique est très pratique quand u est un polynôme et v une fonction que l'on peut facilement intégrer successivement (cos, sin, exp par exemple). Il suffit de dériver n fois u jusqu'à ce que $u^{(n)} = 0$, et l'intégrale est facilement obtenue! Revenons à notre calcul

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \cosh^2 t dt &= \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t \sinh(2t) - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8} \cosh(2t) \right]_0^1 + 0 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sinh 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cosh 2 + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{8}(3 + 2 \sinh 2 - \cosh 2). \end{aligned}$$

Exercice 2. Intégrale curviligne

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe, simple, régulière, paramétrée par $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ simple et régulière. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ et $M = \max_{x \in \Gamma} |f(x)|$. Montrer que

$$\left| \int_{\Gamma} f dl \right| \leq M \times \text{long}(\Gamma).$$

Correction.

$$\left| \int_{\Gamma} f dl \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \times \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq M \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = M \times \text{long}(\Gamma).$$

Exercice 3. Différentiation de Lebesgue

Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. Soient $x_0 \in \Omega$ et $\Gamma \subset \Omega$ une courbe simple et régulière, paramétrée par $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ une paramétrisation simple et régulière de Γ telle que $\gamma(a) = x_0$. On considère pour $t \in]a, b]$ la courbe $\Gamma_t \subset \Gamma$ définie par le morceau de courbe de Γ allant de $\gamma(a)$ à $\gamma(t)$. Finalement, on définit la fonction $g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(t) = \frac{1}{\text{long}(\Gamma_t)} \int_{\Gamma_t} f dl.$$

Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow a^+} g(t) = f(x_0).$$

Correction.

On a

$$g(t) = \frac{1}{\text{long}(\Gamma_t)} \int_{\Gamma_t} f dl = \frac{1}{\text{long}(\Gamma_t)} \int_a^t f(\gamma(s)) \|\dot{\gamma}(s)\| ds.$$

On doit montrer que pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 < t - a < \delta \Rightarrow |g(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ fixé, on a

$$\begin{aligned} |g(t) - f(x_0)| &= \left| g(t) - \frac{1}{\text{long}(\Gamma_t)} f(x_0) \text{long}(\Gamma_t) \right| \\ &= \left| g(t) - \frac{1}{\text{long}(\Gamma_t)} \int_a^t f(x_0) \|\dot{\gamma}(s)\| ds \right| \\ &= \left| \frac{1}{\text{long}(\Gamma_t)} \int_a^t f(\gamma(s)) \|\dot{\gamma}(s)\| ds - \frac{1}{\text{long}(\Gamma_t)} \int_a^t f(x_0) \|\dot{\gamma}(s)\| ds \right| \\ &= \frac{1}{\text{long}(\Gamma_t)} \left| \int_a^t (f(\gamma(s)) - f(x_0)) \|\dot{\gamma}(s)\| ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\text{long}(\Gamma_t)} \int_a^t |f(\gamma(s)) - f(x_0)| \times \|\dot{\gamma}(s)\| ds. \end{aligned}$$

Or $f \circ \gamma$ étant continue sur $[a, b]$, en particulier il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 < s - a < \delta \Rightarrow |f(\gamma(s)) - f(\gamma(a))| = |f(\gamma(s)) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On a finalement, si $0 < t - a < \delta \Rightarrow 0 < s - a < \delta, \forall 0 < s < t$ et ainsi,

$$|g(t) - f(x_0)| \leq \frac{1}{\text{long}(\Gamma_t)} \varepsilon \int_a^t \|\dot{\gamma}(s)\| ds = \frac{1}{\text{long}(\Gamma_t)} \varepsilon \text{long}(\Gamma_t) = \varepsilon.$$

Remarque : On pourrait aussi utiliser la règle de Bernoulli-L'Hospital pour prouver ce résultat. Posons

$$g(t) = \frac{\phi(t)}{\psi(t)},$$

où

$$\phi(t) = \int_{\Gamma_t} f dl, \quad \psi(t) = \text{long}(\Gamma_t).$$

Ainsi,

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t f(\gamma(s)) \|\dot{\gamma}(s)\| ds = f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\|,$$

et

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t \|\dot{\gamma}(s)\| ds = \|\dot{\gamma}(t)\|.$$

Par la règle de Bernoulli-L'Hospital,

$$\lim_{t \rightarrow a^+} g(t) = \frac{\phi'(a)}{\psi'(a)} = \frac{f(\gamma(a)) \|\dot{\gamma}(a)\|}{\|\dot{\gamma}(a)\|} = f(\gamma(a)) = f(x_0).$$

Exercice 4. Circulation d'un vecteur dérivant d'un potentiel sur une courbe fermée

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. De plus, soit $\Gamma \subset \Omega$ une courbe **fermée**, simple est régulière, paramétrisée par $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ une paramétrisation simple et régulière. Pour tout $t \in [a, b]$, on note τ le vecteur tangent unitaire à Γ au point $\gamma(t)$, que l'on définit (au point $\gamma(t)$) comme

$$\tau(\gamma(t)) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}.$$

On définit la circulation de ∇f le long de Γ comme la quantité notée par $\int_{\Gamma} \nabla f \cdot dl$ et donnée par

$$\int_{\Gamma} \nabla f \cdot dl = \int_{\Gamma} \langle \nabla f, \tau \rangle dl.$$

Montrer que

$$\int_{\Gamma} \nabla f \cdot dl = 0.$$

Remarque : on interprète la quantité $\int_{\Gamma} \nabla f \cdot dl$ comme le travail d'une force conservative, que l'on sait être nul sur un chemin fermé.

Correction.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \nabla f \cdot dl &= \int_{\Gamma} \langle \nabla f, \tau \rangle dl = \int_a^b \left\langle \nabla f(\gamma(t)), \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right\rangle \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\ &= \int_a^b \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0, \end{aligned}$$

car Γ est une courbe fermée.

Exercice 5. Facultatif - Inégalité de Poincaré sur une courbe

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ tel que $f(x_0) = 0$ et $\Gamma \subset \Omega$ une courbe simple, régulière, paramétrée par $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ simple et régulière telle que $\gamma(a) = x_0$.

Montrer l'inégalité de Poincaré

$$\left(\int_{\Gamma} |f|^2 dl \right)^{1/2} \leq 2 \text{long}(\Gamma) \left(\int_{\Gamma} \|\nabla f\|^2 dl \right)^{1/2}.$$

Indication : écrire

$$\int_{\Gamma} |f|^2 dl = \int_a^b f^2(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

et appliquer le théorème fondamental du calcul intégral à l'intérieur de \int_a^b sur la quantité $f^2(\gamma(t))$.

Correction.

Utilisons l'indication

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} |f|^2 dl &= \int_a^b f^2(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\
&= \int_a^b (f^2(\gamma(t)) - \underbrace{f^2(x_0)}_{=0}) \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\
&= \int_a^b (f^2(\gamma(t)) - f^2(\gamma(a))) \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\
&= \int_a^b \left[\int_a^t \frac{d}{ds} (f \circ \gamma)^2(s) ds \right] \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\
&= \int_a^b \left[\int_a^t 2f(\gamma(s)) \langle \nabla f(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle ds \right] \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\
&\leq 2 \int_a^b \left[\int_a^t |f(\gamma(s))| \times |\langle \nabla f(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle| ds \right] \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\
&\leq 2 \int_a^b \left[\int_a^t |f(\gamma(s))| \times \|\nabla f(\gamma(s))\| \times \|\dot{\gamma}(s)\| ds \right] \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\
&\leq 2 \int_a^b \left[\int_a^t |f(\gamma(s))| \times \|\dot{\gamma}(s)\|^{1/2} \|\nabla f(\gamma(s))\| \times \|\dot{\gamma}(s)\|^{1/2} ds \right] \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\
&\leq 2 \int_a^b \left(\int_a^t |f(\gamma(s))|^2 \|\dot{\gamma}(s)\| ds \right)^{1/2} \left(\int_a^t \|\nabla f(\gamma(s))\|^2 \|\dot{\gamma}(s)\| ds \right)^{1/2} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\
&= 2 \left(\int_a^b |f(\gamma(s))|^2 \|\dot{\gamma}(s)\| ds \right)^{1/2} \left(\int_a^b \|\nabla f(\gamma(s))\|^2 \|\dot{\gamma}(s)\| ds \right)^{1/2} \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\
&= 2 \left(\int_a^b |f(\gamma(s))|^2 \|\dot{\gamma}(s)\| ds \right)^{1/2} \left(\int_a^b \|\nabla f(\gamma(s))\|^2 \|\dot{\gamma}(s)\| ds \right)^{1/2} \text{long}(\Gamma) \\
&= 2 \text{long}(\Gamma) \left(\int_{\Gamma} |f|^2 dl \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma} \|\nabla f\|^2 dl \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

On a ainsi

$$\left(\int_{\Gamma} |f|^2 dl \right)^{1/2} \leq 2 \text{long}(\Gamma) \left(\int_{\Gamma} \|\nabla f\|^2 dl \right)^{1/2}.$$

Exercice 6. Révisions - Multiplicateur de Lagrange

Dans le plan, on considère un rectangle de côtés x et y variables et de périmètre fixé à la constante P . Donner les valeurs de x et y pour que l'aire du rectangle soit maximale.

Correction.

On considère la fonction $f(x, y) = xy$ et la fonction $g(x, y) = 2x + 2y - P$. Maximiser l'aire du rectangle à périmètre constant P est équivalent au problème de maximisation sous contrainte

$$\max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) \text{ et } g(x, y) = 0.$$

Soit alors $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = xy - \lambda(2x + 2y - P)$ le Lagrangien. On recherche les points stationnaires

$$\nabla F(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2\lambda & = 0 \\ x - 2\lambda & = 0 \\ 2x + 2y - P & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = 2\lambda \\ 4\lambda + 4\lambda = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = P/4 \\ \lambda = P/8 \end{cases}.$$

Le rectangle a donc une aire maximale pour $x = y = P/4$ (c'est un carré) et cette aire vaut $P^2/16$.
Remarque : Pour garantir que le point trouvé est bien le maximum lié, on devrait d'abord s'assurer

que ce dernier existe. Par construction, on a nécessairement que $0 \leq x \leq P/2$, et puisque $2x + 2y = P$, $y = P/2 - x$. On optimise donc $f(x, y) = xy$ sur le compact $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq P/2 \text{ et } y = P/2 - x\}$ donc son minimum lié et son maximum lié existent.

De plus, $f(x, y)$ étant positive, le minimum lié est forcément atteint en $(0, P/2)$ et $(P/2, 0)$ et vaut zéro, donc $(P/4, P/4)$ est nécessairement le maximum lié.

Exercice 7. Révisions - Taylor et fonctions implicites

Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 + xe^y - ye^x$. On considère la courbe $f(x, y) = 0$.

Dans la série 9-A, on a vu qu'au voisinage de $(0, 0)$ la courbe admet une fonction implicite $\varphi(x)$ dont le développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de $x = 0$ est donné par

$$p_2(x) = x + 2x^2.$$

Dans cet exercice, on montre une autre manière d'obtenir une approximation de la fonction implicite au voisinage du point $(0, 0)$.

- Calculer pour (x, y) tel que $f(x, y) = 0$ le développement de Taylor de f à l'ordre 2 autour de $(0, 0)$.
- En utilisant le résultat précédent, et en négligeant le reste, écrire $y = y(x)$ comme une fonction de x dans le voisinage de $(0, 0)$.
- Donner le développement de Taylor de $y(x)$ à l'ordre 2 autour de $x = 0$. Qu'observe-t-on?
- Représenter (avec un logiciel graphique) la courbe $f(x, y) = 0$, $y(x)$ et le développement de Taylor de $y(x)$ autour du voisinage de $(0, 0)$.

Correction.

- On a

$$0 = f(x, y) = f(0, 0) + \langle \nabla f(0, 0), (x, y) \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(0, 0)(x, y), (x, y) \rangle + r(x, y).$$

On calcule

$$\nabla f(x, y) = (2x + e^y - ye^x, 2y + xe^y - e^x) \Rightarrow \nabla f(0, 0) = (1, -1),$$

et

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - ye^x & e^y - e^x \\ e^y - e^x & 2 + xe^y \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$0 = x - y + x^2 + y^2 + r(x, y).$$

- En négligeant le reste, on doit résoudre $0 = y^2 - y + x^2 + x$, avec y comme inconnue. Le discriminant est $\Delta = 1 - 4x^2 - 4x$. Au voisinage de $x = 0$, $\Delta > 0$ et on obtient

$$y(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x^2 - 4x}}{2}.$$

Comme nous sommes dans le voisinage de $(0, 0)$, on a $y(0) = 0$, ce qui nous permet de choisir la branche "−" pour y :

$$y(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2 - 4x}}{2}.$$

c) À l'ordre 2, on a

$$\sqrt{1-z} = 1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + z^2r(z),$$

donc

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}(4x + 4x^2) - \frac{1}{8}(4x + 4x^2)^2 \right) + o(x^2) \\ &= x + x^2 + \frac{1}{16}16x^2 + o(x^2) \\ &= x + 2x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

et on retrouve bien le développement de Taylor de $\varphi(x)$.

d) On donne ici un exemple avec Desmos (<https://www.desmos.com/calculator/qq4gyjwfu6>).

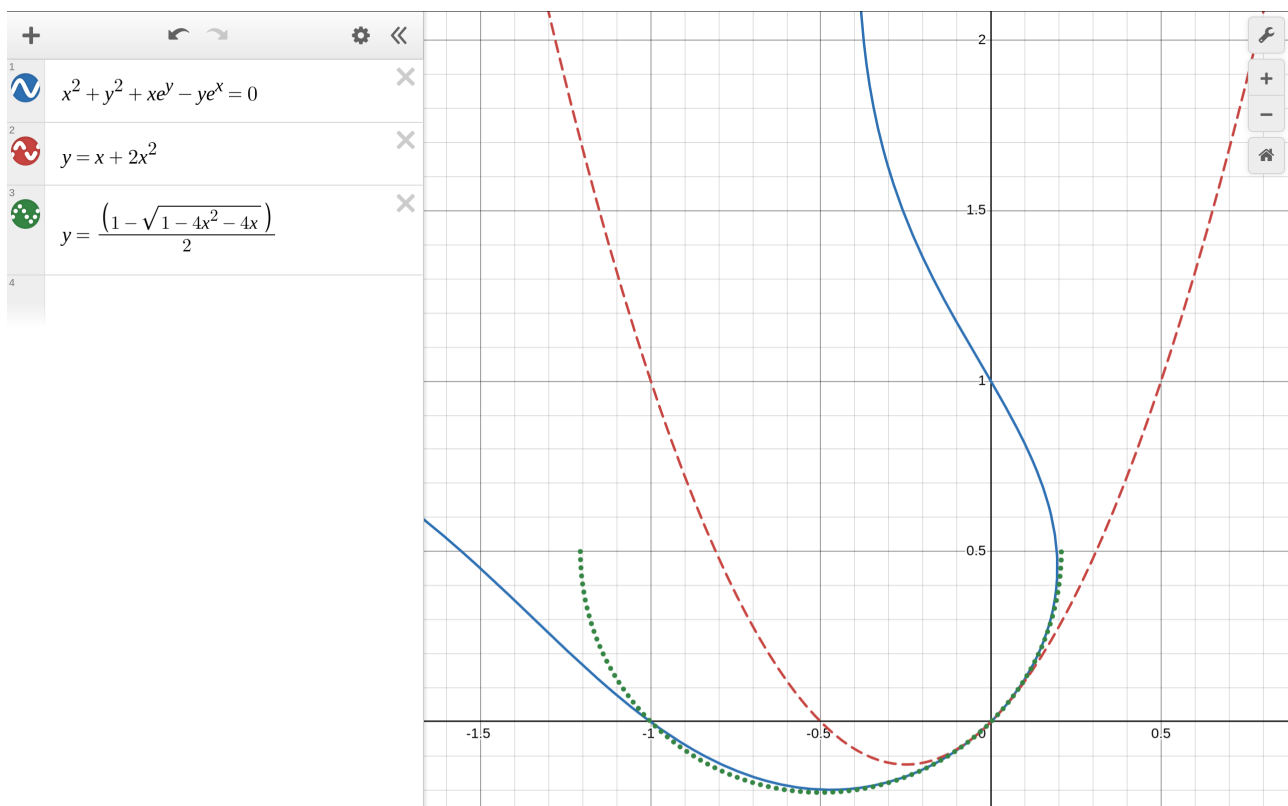


Figure 1: En bleu trait plein, la courbe $f(x, y) = 0$, en rouge traitillé, $y = p_2(x)$, et en vert pointillé, $y = y(x)$.