

Exercice 1. Intégrale curviligne

Soit $f(x, y) = xy$. Calculer les intégrales curvilignes $\int_{\Gamma_i} f dl$ pour les courbes

- a) $\Gamma_1 = \{(t, t) | t \in [0, 1]\}$,
- b) $\Gamma_2 = \{(t, t^2) | t \in [0, 1]\}$,
- c) $\Gamma_3 = \{(\cos t, \sin t) | t \in [0, 2\pi]\}$,
- d) $\Gamma_4 = \{(t, \cosh t) | t \in [0, 1]\}$.

Exercice 2. Intégrale curviligne

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe, simple, régulière, paramétrée par $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ simple et régulière. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ et $M = \max_{x \in \Gamma} |f(x)|$. Montrer que

$$\left| \int_{\Gamma} f dl \right| \leq M \times \text{long}(\Gamma).$$

Exercice 3. Différentiation de Lebesgue

Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. Soient $x_0 \in \Omega$ et $\Gamma \subset \Omega$ une courbe simple et régulière, paramétrée par $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ une paramétrisation simple et régulière de Γ telle que $\gamma(a) = x_0$. On considère pour $t \in]a, b]$ la courbe $\Gamma_t \subset \Gamma$ définie par le morceau de courbe de Γ allant de $\gamma(a)$ à $\gamma(t)$. Finalement, on définit la fonction $g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(t) = \frac{1}{\text{long}(\Gamma_t)} \int_{\Gamma_t} f dl.$$

Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow a^+} g(t) = f(x_0).$$

Exercice 4. Circulation d'un vecteur dérivant d'un potentiel sur une courbe fermée

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. De plus, soit $\Gamma \subset \Omega$ une courbe **fermée**, simple et régulière, paramétrisée par $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ une paramétrisation simple et régulière. Pour tout $t \in [a, b]$, on note τ le vecteur tangent unitaire à Γ au point $\gamma(t)$, que l'on définit (au point $\gamma(t)$) comme

$$\tau(\gamma(t)) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}.$$

On définit la circulation de ∇f le long de Γ comme la quantité notée par $\int_{\Gamma} \nabla f \cdot dl$ et donnée par

$$\int_{\Gamma} \nabla f \cdot dl = \int_{\Gamma} \langle \nabla f, \tau \rangle dl.$$

Montrer que

$$\int_{\Gamma} \nabla f \cdot dl = 0.$$

Remarque : on interprète la quantité $\int_{\Gamma} \nabla f \cdot dl$ comme le travail d'une force conservative, que l'on sait être nul sur un chemin fermé.

Exercice 5. Facultatif - Inégalité de Poincaré sur une courbe

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ tel que $f(x_0) = 0$ et $\Gamma \subset \Omega$ une courbe simple, régulière, paramétrée par $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ simple et régulière telle que $\gamma(a) = x_0$.
Montrer l'inégalité de Poincaré

$$\left(\int_{\Gamma} |f|^2 dl \right)^{1/2} \leq 2 \text{long}(\Gamma) \left(\int_{\Gamma} \|\nabla f\|^2 dl \right)^{1/2}.$$

Indication : écrire

$$\int_{\Gamma} |f|^2 dl = \int_a^b f^2(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

et appliquer le théorème fondamental du calcul intégral à l'intérieur de \int_a^b sur la quantité $f^2(\gamma(t))$.

Exercice 6. Révisions - Multiplicateur de Lagrange

Dans le plan, on considère un rectangle de côtés x et y variables et de périmètre fixé à la constante P . Donner les valeurs de x et y pour que l'aire du rectangle soit maximale.

Exercice 7. Révisions - Taylor et fonctions implicites

Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 + xe^y - ye^x$. On considère la courbe $f(x, y) = 0$.
Dans la série 9-A, on a vu qu'au voisinage de $(0, 0)$ la courbe admet une fonction implicite $\varphi(x)$ dont le développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de $x = 0$ est donné par

$$p_2(x) = x + 2x^2.$$

Dans cet exercice, on montre une autre manière d'obtenir une approximation de la fonction implicite au voisinage du point $(0, 0)$.

- Calculer pour (x, y) tel que $f(x, y) = 0$ le développement de Taylor de f à l'ordre 2 autour de $(0, 0)$.
- En utilisant le résultat précédent, et en négligeant le reste, écrire $y = y(x)$ comme une fonction de x dans le voisinage de $(0, 0)$.
- Donner le développement de Taylor de $y(x)$ à l'ordre 2 autour de $x = 0$. Qu'observe-t-on?
- Représenter (avec un logiciel graphique) la courbe $f(x, y) = 0$, $y(x)$ et le développement de Taylor de $y(x)$ autour du voisinage de $(0, 0)$.

Réponses

Exercice 1.

a) $\int_{\Gamma_1} f dl = \frac{\sqrt{2}}{3}.$

b) $\int_{\Gamma_2} f dl = \frac{1}{120}(25\sqrt{5} + 1).$

c) $\int_{\Gamma_3} f dl = 0.$

d) $\int_{\Gamma_4} f dl = \frac{1}{8}(3 + 2 \sinh 2 - \cosh 2).$