Cours Euler | 3ème année

Test 5 - Intégration | 30.04.25

Nom: ______________________ Prénom: ______________________

Le test dure 90 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire sur une feuille séparée.

Exercice 1. *(6 points)*

On considère la fonction $f : [0;2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(2) = 0$ et $f(x) = 1$ pour tout $x < 2$. Calculer l'intégrale $\int_0^2 f(x)dx$ en utilisant les sommes de Darboux.
Utiliser une subdivision quelconque et préciser les valeurs de $s_\sigma(f)$, $S_\sigma(f)$, $s(f)$ et $S(f)$.

Exercice 2. *(3 points)*

Enoncer le théorème de la moyenne.

Exercice 3. *(5 points)*

Calculer le réel $a > 0$ de façon que l'aire du domaine limité par les courbes $y = x^2$ et $y = ax$ soit égale à 36.

Exercice 4. *(17 points)*

Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 5x \cdot \sin(x^2)$

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{3x^2+5}}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 5}{x^3}$

d) $f(x) = \dfrac{4x-1}{x^2-2x-8}$
(décomposition en éléments simples)

e) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-4x+8}$ (complétion de carré)

Exercice 5. *(21 points)*

a) Calculer l'intégrale suivante en appliquant un changement de variables : $\displaystyle\int_1^5 (x+2)\sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x$

b) Calculer l'intégrale suivante par partie : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

c) Calculer l'intégrale suivante en appliquant le changement de variables $x = e^t$, puis en utilisant l'intégration par parties :

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

d) Calculer, si possible, l'intégrale généralisée suivante : $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

Exercice 6. *(4 points)*

Calculer la longueur de la courbe de la fonction $f(t) = \sinh(t)$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

Exercice 7. *(7 points)*

Déterminer le minimum global de la fonction $f(x) = \displaystyle\int_{e^x}^{e^{2x}} t^3\,\mathrm{d}t$.