Leonid Monin
Léo Navarro Chafloque

EPFL, semestre de printemps 2026
Rings and fields

# Exercices – Semaine 9

**Exercice 1.**
Soit $K$ un corps et $L$ une extension quadratique, i.e. $[L : K] = 2$.

1. Montrez que toute extension de $K$ de degré 1 est égale à $K$.
2. Montrez qu'il existe un élément $\alpha \in L$ tel que $L = K(\alpha)$.
3. Soit $K$ de caractéristique différente de 2. Montrez qu'il existe un élément $\delta \in L$ avec $\delta^2 = d \in K$ tel que $L = K(\delta) = K(\sqrt{d})$.
4. Soit $M$ une extension de $K$ et $\delta \in M \setminus K$ un élément avec $\delta^2 \in K$. Montrez que $K(\delta)$ est une extension quadratique de $K$.

**Exercice 2.**
1. Soit $L$ une extension de $K$ avec $[L : K]$ impair. Montrer que $K(\alpha) = K(\alpha^2)$ pour tout $\alpha \in L \setminus K$.
2. Soient $p, q \in \mathbb{Z}$ deux nombres premiers distincts. Montrez que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{q})$ et $\sqrt{q} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p})$. Calculez $[\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbb{Q}]$.
3. Soit $L$ une extension de $K$ et soient $\alpha, \beta \in L$ des éléments tels que $[K(\alpha) : K] = m$ et $[K(\beta) : K] = n$ sont premiers entre eux. Montrer que $[K(\alpha, \beta) : K] = mn$.

**Exercice 3.**
Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{7})$. Montrez que $[K : \mathbb{Q}] = 4$.

**Exercice 4.**
Dans tous les cas suivants, calculez le degré de l'extension.

1. $[\mathbb{R}(e^{2i\pi/p}) : \mathbb{R}]$ pour $p$ un nombre premier;
2. $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ pour $\alpha$ une racine de $t^{42} + t^{41} + \cdots + t^2 + t + 1$;
3. $[\mathbb{Q}(i, \sqrt[5]{13}) : \mathbb{Q}]$;
4. $[\mathbb{F}_3(\alpha) : \mathbb{F}_3]$ où $\alpha$ est une racine de $t^4 - t^3 - t^2 - t - [1]_3 \in \mathbb{F}_3[t]$ La réponse peut changer en fonction de la racine considérée.
5. $[\mathbb{Q}(\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ (on pourra calculer $(3 + \sqrt{5})^2$ pour commencer);
6. $[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) : \mathbb{Q}((\sqrt[6]{7})^2)]$;
7. $[\mathbb{F}_2(\alpha) : \mathbb{F}_2(\alpha^2)]$ où $\alpha$ est une racine de $t^3 + t + [1]_2 \in \mathbb{F}_2[t]$.

**Exercice 5.**
Soient $K \subset L \subset F$ des extensions de corps. Si $K \subset L$ et $L \subset F$ sont algébriques, montrez qu'il en est de même pour $K \subset F$.

**Exercice 6.**
Soit $\mathbb{Q}(x)$ le corps de fractions de l'anneau polynomial $\mathbb{Q}[x]$, et considérons

$$s := \frac{x^3 + 2}{x} \in \mathbb{Q}(x).$$

On a les extensions successives $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(s) \subset \mathbb{Q}(x)$.

1. Montrez que $\mathbb{Q}(x)$ est une extension algébrique de $\mathbb{Q}(s)$.
2. Calculez $[\mathbb{Q}(s) : \mathbb{Q}]$ et $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}(s)]$.