Leonid Monin
Léo Navarro Chafloque

EPFL, semestre de printemps 2026
Rings and fields

Exercices – Semaine 8

Exercice 1 (Polynômes irréductibles I). (a) Montrer que $\frac{2}{9}x^5 + \frac{5}{3}x^4 + x^3 + \frac{1}{3}$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Montrer que $x^4 + [2]_5$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_5[x]$ et conclure que $x^4 + 15x^3 + 7$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x]$.

(c) Montrer que $x^2 + y^2 + 1$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[x, y]$.

(d) Montrer que $x^2 + y^2 + [1]_2$ n'est pas un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_2[x, y]$.

(e) Montrer que $y^4 + x^3 + x^2y^2 + xy + 2x^2 - x + 1$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x, y]$.

(f) Montrer que $4x^3 + 120x^2 + 8x - 12$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x]$.

(g) Montrer que $t^6 + t^3 + 1$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[t]$.

(h) Montrer que $y^4 + xy^3 + xy^2 + x^2y + 3x^2 - 2x$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x, y]$.

Exercice 2 (Polynômes irréductibles II).
Soit $f(t) = t^4 + 4t^3 + 3t^2 + 7t - 4$ dans $\mathbb{Z}[t]$.

(a) Montrer que $\pi_2(f)$, la réduction modulo 2, n'est pas irréductible.

(b) Montrer que $\pi_3(f)$, la réduction modulo 3, n'est pas irréductible.

(c) Utiliser les décompositions des parties précédentes pour conclure néanmoins que f est irréductible.

Exercice 3 (Polynômes irréductibles III).
Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[t]$.

1. $t^3 + 67t + 2027$
2. $3t^2 + 12t + 3$
3. $t^n - p$ où $n \in \mathbb{N}$ et p un nombre premier.
4. $7t^3 + 2t^2 + 2t + 2$

Indication: Pour le dernier point, on peut procéder ainsi. On montre que $\mathbb{Z}[\frac{1}{7}] = \{\frac{a}{7^n} \mid a \in \mathbb{Z} \quad n \in \mathbb{N}\}$ *est un anneau factoriel de corps des fractions* $\mathbb{Q}$. *On montre qu'on a un morphisme surjectif* $\mathbb{Z}[\frac{1}{7}] \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *pour tout premier* $p \neq 7$. *Ensuite on choisit un premier arrangeant pour montrer que la réduction de* $t^3 + \frac{2}{7}t^2 + \frac{2}{7}t + \frac{2}{7}$ *est irréductible dans* $\mathbb{F}_p[t]$.

Exercice 4.
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Quand est-ce que les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{b})$ sont isomorphes en tant que $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels?
2. Quand est-ce que les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{b})$ sont isomorphes en tant que corps?