Exercice 1. Multiplicateurs de Lagrange - dimension 2

Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Donner le minimum et le maximum de $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

Correction.

On rappelle la méthode suivante : on construit le lagrangien

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

et on cherche les points stationnaires de F en résolvant

$$\nabla F(x,y,\lambda) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), -g(x,y)\right) = (0,0,0).$$

Puis on évalue f dans les points (x,y) trouvés et on compare les valeurs pour déterminer les minima et les maxima.

On doit résoudre

$$\nabla F(x,y,\lambda) = (0,0,0) \iff \begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ -4y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ -2y(2+\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

La première équation est satisfaite si $x = 0$ ou si $\lambda = 1$.

- Si $x = 0$, alors forcément la troisième équation implique que $y = \pm 1$ et donc la seconde équation implique que $\lambda = -2$
- Si $\lambda = 1$, alors forcément la second équation implique que $y = 0$. La troisième équation implique que $x = \pm 1$.
- On observe que le cas $x = 0$ et $\lambda = 1$ ne conduit à aucune solution car la seconde équation implique $y = 0$ mais la troisième $y = \pm 1$.

Les points stationnaires sont donc $(0,1,-2), (0,-1,-2), (1,0,1), (-1,0,1)$.

On évalue alors $f(1,0) = f(-1,0) = 1$ et $f(0,1) = f(0,-1) = -2$.

Le minimum est donc -2 et est atteint en $(0,1)$ et $(0,-1)$. Le maximum est 1 et est atteint en $(1,0)$ et $(-1,0)$.

Exercice 2. Multiplicateurs de Lagrange - dimension 2

Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = x^2 + 9y^2 + x, \quad g(x,y) = x^2 + 3y^2 - 1.$$

Donner le minimum et le maximum de $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

Correction.

On rappelle la méthode suivante : on construit le lagrangien

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

et on cherche les points stationnaires de F en résolvant

$$\nabla F(x,y,\lambda) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), -g(x,y)\right) = (0,0,0).$$

Puis on évalue f dans les points (x, y) trouvés et on compare les valeurs pour déterminer les minima et les maxima.

On doit résoudre

$$\nabla F(x,y,\lambda) = (0,0,0) \iff \begin{cases} 2x + 1 - 2\lambda x = 0 \\ 18y - 6\lambda y = 0 \\ x^2 + 3y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(1-\lambda) + 1 = 0 \\ 2y(9 - 3\lambda) = 0 \\ x^2 + 3y^2 = 1 \end{cases}$$

La seconde équation est satisfaite si $y = 0$ ou si $\lambda = 6$.

- Si $y = 0$, alors forcément la troisième équation implique que $x = \pm 1$ et donc la première équation implique que $\lambda = \frac{1}{2}$ ou $\lambda = \frac{3}{2}$
- Si $\lambda = 3$, alors forcément la première équation implique que $x = \frac{1}{4}$. La troisième équation implique que $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{4}$.
- On observe que le cas $y = 0$ et $\lambda = 3$ ne conduit à aucune solution car les valeurs de x obtenues par la première et la troisième équations sont incompatibles.

Les points stationnaires sont donc

$$\left(1, 0, \frac{3}{2}\right), \left(-1, 0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{5}}{4}, 3\right), \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{5}}{4}, 3\right).$$

On évalue et on compare :

$$f(1,0) = 2, f(-1,0) = 0, f\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{5}}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{25}{8}.$$

Le minimum est donc atteint en $(-1, 0)$ et vaut 0 et le maximum est atteint en $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{5}}{4}\right)$ et $\left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$ et vaut $\frac{25}{8}$. Il est toujours utile de vérifier ses calculs en calculant si les points trouvés vérifient bien la contrainte $g(x, y) = 0$. Pour le point $(-1, 0)$, c'est évident, et pour les autres, $(1/4)^2 + 3(\pm\sqrt{5}/4)^2 = 1/16 + 15/16 = 1$.

Exercice 3. Multiplicateurs de Lagrange - dimension 3

Soient $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - 3z^2, \quad g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 1.$$

Donner le minium et le maximum de f sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$.

Correction.

On rappelle la méthode suivante : on construit le lagrangien

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$

et on cherche les points stationnaires de F en résolvant

$$\begin{aligned}\nabla F(x,y,z,\lambda) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - \lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) - \lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) - \lambda\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z), -g(x,y,z)\right) \\ &= (0,0,0,0).\end{aligned}$$

On doit donc résoudre le système

$$\nabla F(x,y,z,\lambda) = (0,0,0,0) \iff \begin{cases} 2(2-\lambda)x = 0 \\ -2(1+\lambda)y = 0 \\ -2(3+2\lambda)z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x(2-\lambda) = 0 \\ y(1+\lambda) = 0 \\ z(3+2\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \end{cases}$$

La première équation est satisfaite si $x = 0$ ou si $\lambda = 2$.

a) Si $x = 0$

- Si $y = 0$ (2ème éq.), on a $z = \pm 1/\sqrt{2}$ (4ème éq.) et $\lambda = -3/2$ (3ème éq.) ,
- Si $z = 0$ (3ème éq.), on a $y = \pm 1$ (4ème éq.) et $\lambda = -1$ (2ème éq).,
- Observation : $x = y = z = 0$ n'est pas possible en raison de la quatrième équation.

b) Si $\lambda = 2$, alors forcément $y = z = 0$ (2ème et 3ème éq.) et donc $x = \pm 1$.

On a donc comme points stationnaires :

$$(0, 0, \pm 1/\sqrt{2}, -3/2), (0, \pm 1, 0, -1), (\pm 1, 0, 0, 2).$$

On évalue f dans les différents points :

$$f(0, 0, \pm 1/\sqrt{2}) = -3/2, f(0, \pm 1, 0) = -1, f(\pm 1, 0, 0) = 2.$$

Le maximum est donc atteint en $(\pm 1, 0, 0)$ et vaut 2 et le minimum en $(0, 0, \pm 1\sqrt{2})$ et vaut $-3/2$.

Exercice 4. Multiplicateurs de Lagrange - dimension 3

Soient $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y, z) = x - y + z, \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Donner le minium et le maximum de f sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$.

Correction.

On rappelle la méthode suivante : on construit le lagrangien

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$$

et on cherche les points stationnaires de F en résolvant

$$\begin{aligned}\nabla F(x, y, z, \lambda) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) - \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z), -g(x, y, z)\right) \\ &= (0, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

On doit donc résoudre le système

$$\nabla F(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 0, 0) \iff \begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ -1 - 2\lambda y = 0 \\ 1 - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda x = 1 \\ 2\lambda y = -1 \\ 2\lambda z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Nécessairement $\lambda \neq 0$, on peut alors isoler x, y, z dans les troisièmes premières équations et obtenir

$$x = \frac{1}{2\lambda}, y = \frac{-1}{2\lambda}, z = \frac{1}{2\lambda}$$

d'où en injectant dans la quatrième équation

$$\frac{3}{4\lambda^2} = 1 \iff \lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Les deux points stationnaires sont donc

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

On évalue :

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3}, \quad f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = -\sqrt{3}.$$

Le minimum vaut $-\sqrt{3}$ et est atteint en $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$ et le maximum vaut $\sqrt{3}$ et est atteint en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Exercice 5. Multiplicateur de Lagrange avec plusieurs contraintes

Soient $f, g_1, g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y,z) = x+y+z, \quad g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1, \quad g_2(x,y,z) = x-y-1.$$

Donner le minimum et le maximum de f sous les contraintes $g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0$

Correction.

On pose

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x,y,z,\lambda,\mu) =& f(x,y,z) + \lambda g_1(x,y,z) + \mu(x,y,z)\\ =& x+y+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x-y-1)\end{aligned}$$

on résout le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,z,\lambda,\mu) = 0 & \Leftrightarrow & 1+2\lambda x+\mu = 0 & (1)\\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,z,\lambda,\mu) = 0 & \Leftrightarrow & 1+2\lambda y-\mu = 0 & (2)\\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x,y,z,\lambda,\mu) = 0 & \Leftrightarrow & 1+2\lambda z = 0 & (3)\\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda,\mu) = 0 & \Leftrightarrow & x^2+y^2+z^2-1 = 0 & (4)\\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}(x,y,z,\lambda,\mu) = 0 & \Leftrightarrow & x-y-1 = 0 & (5) \end{cases}$$

Commençons par remarquer que $\lambda \neq 0$. En effet, si $\lambda = 0$, alors l'équations (3) devient $1 = 0$ et ceci mène donc à une contradiction.

Ainsi, on a

$$\begin{cases} (1) : x = \dfrac{-1-\mu}{2\lambda}\\ (2) : y = \dfrac{-1+\mu}{2\lambda} & \overset{(5)}{\Rightarrow} \quad \dfrac{-1-\mu}{2\lambda} - \dfrac{-1+\mu}{2\lambda} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu = -\lambda\\ (3) : z = \dfrac{-1}{2\lambda} \end{cases}$$

Et donc

$$\begin{cases} (1) : x = \dfrac{-1+\lambda}{2\lambda}\\ (2) : y = \dfrac{-1-\lambda}{2\lambda} & \overset{(4)}{\Rightarrow} \quad \left(\dfrac{-1+\lambda}{2\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{-1-\lambda}{2\lambda}\right)^2 + \dfrac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0\\ (3) : z = \dfrac{-1}{2\lambda} \end{cases}$$

Qui se réécrit

$$\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 + 1 - 4\lambda^2}{4\lambda^2} = 0$$

$$-2\lambda^2 + 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

On arrive donc à

$$\boxed{\lambda = -\sqrt{\frac{3}{2}}} \quad (x,y,z) = \left(\frac{-1-\sqrt{\frac{3}{2}}}{-2\sqrt{\frac{3}{2}}}, \frac{-1+\sqrt{\frac{3}{2}}}{-2\sqrt{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$\boxed{\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}}} \quad (x,y,z) = \left(\frac{-1+\sqrt{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\frac{3}{2}}}, \frac{-1-\sqrt{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\frac{3}{2}}}, \frac{-1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)$$
$$= \left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)$$

Ainsi, le minimum et le maximum de f sous les contraintes données sont parmis

$$f\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$f\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ainsi le maximum de f sous les contraintes est $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et le minimum de f est $-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Exercice 6. Optimisation

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = 3x^2 + y^2$$

et D défini par

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Donner le minimum global et le maximum global de f sur D.

Correction.

D est un ensemble fermé et borné, et f est continue, il existe donc un minimum et un maximum global sur D. On rappelle la méthode de recherche suivante : on cherche les extrema locaux parmi les points ci-dessous :

a) On cherche les points stationnaires de f à l'intérieur de D pour lesquelles on applique le critère de la Hessienne.

b) On décrit le bord ∂D comme $g(x,y) = x^2+y^2-4 = 0$ et on évalue f dans les points $(x_0, y_0) \in \partial D$ telle que $\nabla g(x_0, y_0) = (0,0)$.

c) On décrit le bord ∂D comme $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ et on construit le lagrangien

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

et on en cherche les points stationnaires.

a) Les points stationnaires de f dans l'intérieur de D sont donnés par les équations

$$\nabla f(x,y) = (6x, 2y) = (0,0) \iff x = y = 0$$

Le point $(0,0)$ appartient à l'intérieur de D pour lequel la Hessienne vaut

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est positif et le coefficient en haut à gauche également, $(0,0)$ est donc un point à minimum local.

b) On calcule $\nabla g(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \iff x = y = 0$. or $(0,0) \notin \partial D$: il n'y a pas de points dans cette catégorie.

c) On construit le lagrangien $F(x,y,\lambda)$. Les point stationnaires doivent satisfaire les équations

$$\nabla F(x,y,\lambda) = (0,0,0) \iff \begin{cases} 6x - \lambda 2x = 0 \\ 2y - \lambda 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(3-\lambda) = 0 \\ 2y(1-\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

La première équation est satisfaite pour $x = 0$ ou $\lambda = 3$.

- Si $x = 0$, nécessairement $y = \pm 2$ (3ème équation) et $\lambda = 1$ (deuxième équation)
- Si $\lambda = 3$, $y = 0$ (deuxième équation) et nécessairement $x = \pm 2$ (troisième équation).

Les points stationnaires de F sont $(0,2,1), (0,-2,1), (2,0,3), (-2,0,3)$.

d) On évalue f dans les différents points :

$$f(0,0) = 0, f(0,2) = f(0,-2) = 4, f(2,0) = f(-2,0) = 12.$$

Le minimum global vaut donc 0 et est atteint en $(0,0)$. Le maximum global est atteint en $(-2,0)$ et $(2,0)$ et vaut 12.

Alternative : pour chercher les candidats sur le bord, on peut aussi paramétrer la courbe

$$\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 4\}$$

par

$$\gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t)), t \in [0, 2\pi]$$

puis considérer la fonction $f(\gamma(t)), t \in [0, 2\pi]$. On cherchera alors les candidats parmi les points $f(\gamma(0)) = f(\gamma(2\pi))$ et les points tels que $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0$.

Exercice 7. Exercice de révision - plan tangent

a) Soit la surface $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = \sin(\pi x)\sin(\pi y) + x + y\right\}$. Donner l'équation du plan tangent à S au point $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$.

b) Soit la surface $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \sqrt{2}\sin(\pi xy)\sin(\pi xz)\sin(\pi yz) = 1\right\}$. Donner l'équation du plan tangent à S au point $(x_0, y_0, z_0) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Correction.

a) S s'exprime comme le graphe de la fonction $f(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y) + x + y$. De plus, on a $z_0 = f(x_0, y_0)$. On calcule les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \pi\cos(\pi x)\sin(\pi y) + 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \pi\sin(\pi x)\cos(\pi y) + 1$$

Le plan tangent en (x_0, y_0, z_0) est donc donné par l'équation :

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) = -1 + 1\cdot(x - \frac{1}{2}) + 1\cdot(y + \frac{1}{2}) = x + y - 1$$

b) La surface S est décrite implicite par la fonction $F(x,y,z) = \sqrt{2}\sin(\pi xy)\sin(\pi xz)\sin(\pi yz) = 1$. L'équation du plan tangent au point (x_0, y_0, z_0) est donnée par l'équation

$$\langle \nabla F(x_0,y_0,z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0)\rangle = 0.$$

On calcule les dérivées partielles de F :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) &= \sqrt{2}\pi y\cos(\pi xy)\sin(\pi xz)\sin(\pi yz) + \sqrt{2}\pi z\sin(\pi xy)\cos(\pi xz)\sin(\pi yz)\\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) &= \sqrt{2}\pi x\cos(\pi xy)\sin(\pi xz)\sin(\pi yz) + \sqrt{2}\pi z\sin(\pi xy)\sin(\pi xz)\cos(\pi yz)\\
\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) &= \sqrt{2}\pi x\sin(\pi xy)\cos(\pi xz)\sin(\pi yz) + \sqrt{2}\pi y\sin(\pi xy)\sin(\pi xz)\cos(\pi yz)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) &= 0\\
\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) &= \frac{\pi}{2}\\
\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

D'où l'équation du plan est

$$\left\langle \left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(x - 1, y - \frac{1}{2}, z - \frac{1}{2}\right)\right\rangle = 0 \iff \frac{\pi}{2}y + \frac{\pi}{2}z - \frac{\pi}{2} = 0 \iff y + z - 1 = 0.$$