

**Exercice 1. Multiplicateurs de Lagrange - dimension 2**

Soient  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Donner le minimum et le maximum de  $f(x, y)$  sous la contrainte  $g(x, y) = 0$ .

**Exercice 2. Multiplicateurs de Lagrange - dimension 2**

Soient  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$f(x, y) = x^2 + 9y^2 + x, \quad g(x, y) = x^2 + 3y^2 - 1.$$

Donner le minimum et le maximum de  $f(x, y)$  sous la contrainte  $g(x, y) = 0$ .

**Exercice 3. Multiplicateurs de Lagrange - dimension 3**

Soient  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - 3z^2, \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 1.$$

Donner le minimum et le maximum de  $f$  sous la contrainte  $g(x, y, z) = 0$ .

**Exercice 4. Multiplicateurs de Lagrange - dimension 3**

Soient  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$f(x, y, z) = x - y + z, \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Donner le minimum et le maximum de  $f$  sous la contrainte  $g(x, y, z) = 0$ .

**Exercice 5. Multiplicateur de Lagrange avec plusieurs contraintes**

Soient  $f, g_1, g_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$f(x, y, z) = x + y + z, \quad g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x - y - 1.$$

Donner le minimum et le maximum de  $f$  sous les contraintes  $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$

**Exercice 6. Optimisation**

Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

et  $D$  défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Donner le minimum global et le maximum global de  $f$  sur  $D$ .

**Exercice 7. Exercice de révision - plan tangent**

- Soit la surface  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sin(\pi x) \sin(\pi y) + x + y\}$ . Donner l'équation du plan tangent à  $S$  au point  $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$ .
- Soit la surface  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{2} \sin(\pi xy) \sin(\pi xz) \sin(\pi yz) = 1\}$ . Donner l'équation du plan tangent à  $S$  au point  $(x_0, y_0, z_0) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

# Réponses

---

**Exercice 1.**

Le maximum de  $f$  est atteint en  $(\pm 1, 0)$  et vaut 1. Le minimum de  $f$  est atteint en  $(0, \pm 1)$  et vaut  $-2$ .

**Exercice 2.**

Le maximum de  $f$  est atteint en  $(1/4, \pm\sqrt{5}/4)$  et vaut  $25/8$ . Le minimum de  $f$  est atteint en  $(-1, 0)$  et vaut 0.

**Exercice 3.**

Le maximum de  $f$  est atteint en  $(\pm 1, 0, 0)$  et vaut 2. Le minimum de  $f$  est atteint en  $(0, 0, \pm 1/\sqrt{2})$  et vaut  $-3/2$ .

**Exercice 4.**

Le maximum de  $f$  est atteint en  $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$  et vaut  $\sqrt{3}$ . Le minimum de  $f$  est atteint en  $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$  et vaut  $-\sqrt{3}$ .

**Exercice 5.**

Le maximum de  $f$  est atteint en  $\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)$  et vaut  $\sqrt{\frac{3}{2}}$ . Le minimum de  $f$  est atteint en  $\left(\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)$  et vaut  $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ .

**Exercice 6.**

Le maximum de  $f$  sur  $D$  est atteint en  $(\pm 2, 0)$  et vaut 12. Le minimum de  $f$  est atteint en  $(0, 0)$  et vaut 0.

**Exercice 7.**

a)  $z = x + y - 1,$

b)  $y + z - 1 = 0.$