Exercice 1. Echauffement - révision - fonction implicite

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\Omega)$. On considère la courbe $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ définie implicitement par

$$\Gamma = \{(x, y) \in \Omega | f(x, y) = 0\} .$$

Soit finalement $(x_0, y_0) \in \Gamma$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Le théorème des fonctions implicites donne l'existence et l'unicité d'une fonction $\varphi : U \to V$, avec $U \ni x_0$, $V \ni y_0$ deux ouverts tels que $\varphi \in C^1(U)$, $\varphi(x_0) = y_0$ et

$$f(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in U.$$

a) Montrer que si $f \in C^2(\Omega)$, alors $\varphi \in C^2(U)$. Indication : calculer $\varphi''(x)$, pour tout $x \in U$.

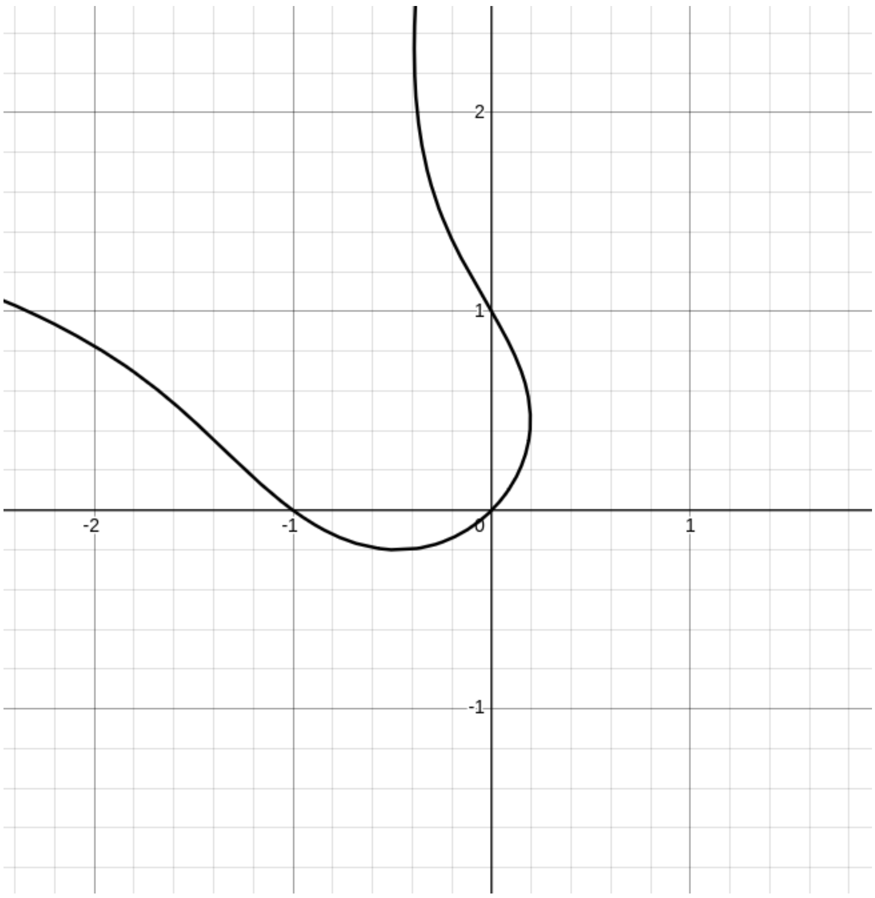
b) Supposons que l'on connait les valeurs de toutes les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f en (x_0, y_0). Donner, en terme de ces valeurs et de (x_0, y_0), le polynôme de Taylor de $\varphi(x)$ autour de $x = x_0$ à l'ordre 2

c) Appliquer le résultat précédent pour donner le polynôme de Taylor de $\varphi(x)$ autour de $x = 0$ où $\varphi(x)$ est la fonction implicite associée à la courbe d'équation

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xe^y - ye^x = 0$$

et à $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Esquisser le graphe de ce polynôme sur le schéma ci-dessous où on a représenté la courbe $f(x, y) = 0$ dans un voisinage de $(0, 0)$:



Correction.

a) Soit en dérivant par rapport à x l'équation $f(x,\varphi(x)) = 0$, soit en utilisant directement la formule du théorème, on obtient

$$\varphi'(x) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}, \forall x \in U$$

En dérivant deux fois l'équation par rapport à x, ou en dérivant une fois la formule précédente, on obtient

$$\varphi''(x) = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3}, \forall x \in U,$$

où l'on a omit l'argument $(x,\varphi(x))$ des dérivées partielles pour une meilleure lisibilité. Puisque toutes les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f sont continues, on obtient directement que $\varphi \in C^2(U)$.

b) Le polynôme de Taylor de φ d'ordre 2 autour de x_0 est

$$p_2(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}\varphi''(x_0)(x-x_0)^2.$$

On obtient alors le résultat voulu en utilisant les formules pour $\varphi'(x_0)$ et $\varphi''(x_0)$:

$$p_2(x) = y_0 - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}(x-x_0)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)^2 - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)^2}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)^3}(x-x_0)^2$$

c) Calculons pour commencer toutes les dérivées partielles de f

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + e^y - ye^x, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + xe^y - e^x.$$

En $(0,0)$, on obtient donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1.$$

De plus,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 - ye^x, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = e^y - e^x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 + xe^y$$

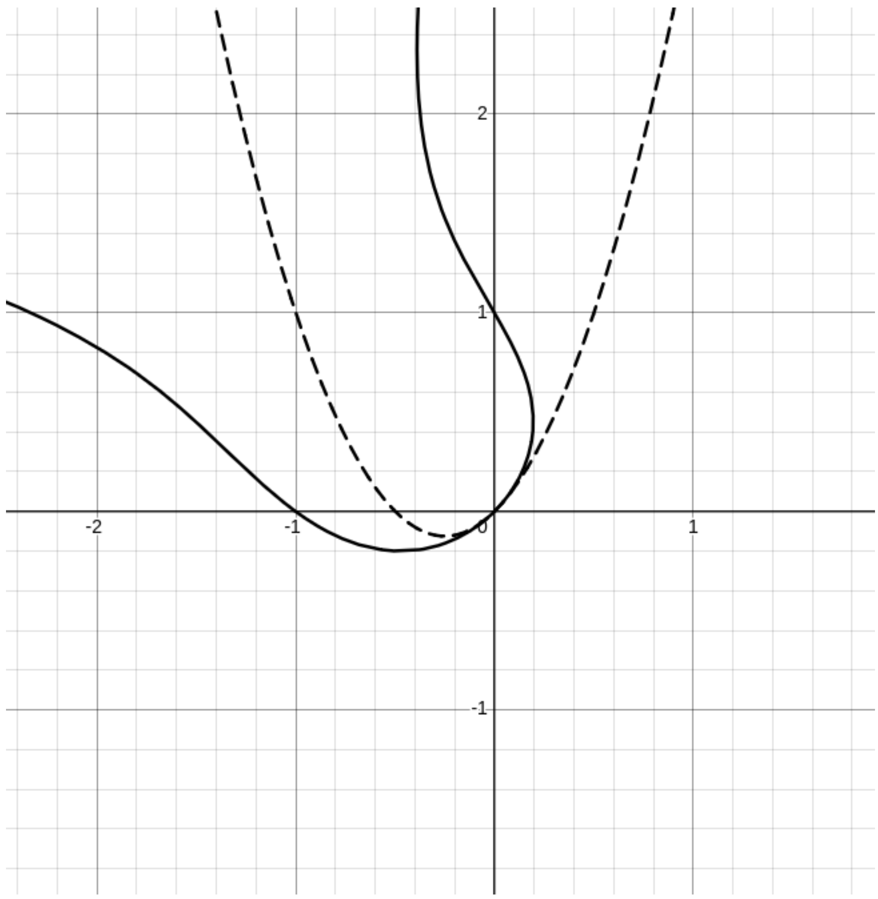
En $(0,0)$, on obtient donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$$

D'où en appliquant les formules précédentes, on a trouve finalement que le polynôme de Taylor de $\varphi(x)$ autour de $x = 0$ est donné par

$$p_2(x) = x + 2x^2$$

Ci-dessous on représente en trait plein la courbe dans un voisinage de $(0,0)$ et en traitillé le polynôme de Taylor d'ordre 2 de la fonction implicite



Exercice 2. Révision - critère de la hessienne pour l'optimisation

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et $f \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ une fonction à valeur réelle. Pour $(x,y) \in \Omega$, on définit son **laplacien** $\nabla^2 f(x,y)$ comme la trace de la matrice hessienne de f, c'est-à-dire comme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

On suppose que f satisfait les hypothèses suivantes :

Hyp 1 : pour tout $(x,y) \in \Omega$, $\nabla^2 f(x,y) = 0$.

Hyp 2 : pour tout $(x,y) \in \Omega$, les valeurs propres de la matrice hessiennes sont non nulles

Montrer alors que le maximum globale de f et le minimum global de f sur $\overline{\Omega}$ sont atteints par des points $(x,y) \in \partial\Omega$ et qu'aucun point $(x,y) \in \Omega$ ne peut être un extremum global.

Remarque 1: l'opérateur laplacien $\nabla^2 f(x,y)$ est un opérateur différentiel très fréquent en mathématiques et en physique. On le retrouve par exemple en mécanique des fluides ou en thermodynamique.

Remarque 2: lorsque $\nabla^2 f(x,y) = 0$, on dit que f est harmonique. Les fonctions harmoniques ont des nombreuses utilisations dans de très vastes et variés domaines (traitement du signal, physique, analyse complexe...)

Remarque 3 : le résultat de cet exercice reste vrai (à l'exception des fonctions constantes qui atteignent leurs extrema à l'intérieur du domaine) si on retire l'hypothèse 2, mais la preuve est plus compliquée. On appelle ce résultat le "principe du maximum".

Correction.

Puisque f est continue sur le compacte $\overline{\Omega}$, elle admet un maximum global et un minimum global sur $\overline{\Omega}$. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe un point dans l'ouvert Ω où le maximum global est atteint. (La preuve est identique pour le minmum local).

Si $(x_0, y_0) \in \Omega$ est un maximum global, alors en particulier c'est un extremum local, et donc c'est un point stationnaire, donc $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Appliquons à présent le critère de la hessienne à ce point stationnaire. Comme la hessienne $H_f(x_0, y_0)$ est symétrique, elle est diagonalisable et de plus sa trace et son déterminant sont donnés par

$$\mathrm{tr} H_f(x_0, y_0) = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \det H_f(x_0, y_0) = \lambda_1 \lambda_2$$

où λ_1, λ_2 sont les valeurs propres de $H_f(x_0, y_0)$. Comme le laplacien de f est nul en tout $(x, y) \in \Omega$, on obtient nécessairement que

$$\lambda_1 = -\lambda_2.$$

Comme les valeurs propres sont nulles, on obtient que nécessairement

$$\det H_f(x_0, y_0) = \lambda_1 \lambda_2 = -\lambda_2^2 < 0.$$

Par conséquent le point (x_0, y_0) est une point selle ce qui est contradictoire.

Le maximum global n'est donc pas atteint dans Ω, donc nécessairement il est atteint sur $\partial\Omega$.

Exercice 3. Révision - règle de la chaine - laplacien en coordonnée polaire

Soit $f \in C^2(\Omega)$, où

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y > 0\right\}.$$

a) Montrer que, si on effectue le changement en coordonnées polaires

$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), r > 0, \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

et que l'on définit

$$g\left(r, \theta\right) := f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right),$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g(r,\theta)}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}{\partial y^2} \\ &= \nabla^2 f(r(\cos(\theta), r\sin(\theta)).\end{aligned}$$

Indication : calculer les dérivées partielles de g par la règle de la chaine puis calculer la quantité

$$\frac{\partial^2 g(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g(r,\theta)}{\partial \theta^2}$$

b) Calculer $\nabla^2 f(x, y)$ pour

$$f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2} + \left(\arctan\frac{y}{x}\right)^2.$$

Indication : passer en coordonnées polaires

Correction.

a)

b) <u>*Variante 1*</u> : Calcul direct.

On a

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) =& \frac{\partial}{\partial r}\left[f(r\cos\theta, r\sin\theta)\right]\\
=& \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left[r\cos\theta\right] + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left[r\sin\theta\right]\\
=& \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\\
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) =& \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\right]\\
=& \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right]\cos\theta + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right]\sin\theta\\
=& \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left[r\cos\theta\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left[r\sin\theta\right]\right)\cos\theta\\
&+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left[r\cos\theta\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left[r\sin\theta\right]\right)\sin\theta\\
=& \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta\sin\theta\\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin^2\theta\\
\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) =& \frac{\partial}{\partial \theta}\left[f(r\cos\theta, r\sin\theta)\right]\\
=& \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\left[r\cos\theta\right] + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\left[r\sin\theta\right]\\
=& r\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta\right)\\
\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) =& \frac{\partial}{\partial \theta}\left[r\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta\right)\right]\\
=& r\left(-\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right]\sin\theta - \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta\right.\\
&\left. + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right]\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\right)\\
=& -r\sin\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\left[r\cos\theta\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\left[r\sin\theta\right]\right)\\
&- r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\\
&+ r\cos\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\left[r\cos\theta\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\left[r\sin\theta\right]\right)\\
&- r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\\
=& r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) - 2r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\\
&+ r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\\
&- r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} &+ \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \\
&= \underbrace{\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)}_{=1}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \underbrace{\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)}_{=1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&= \nabla^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta)
\end{aligned}$$

<u>*Variante 2*</u> : Avec des feintes de physicien·nes :)

Si $x(r,\theta) = r\cos\theta$ et $y(r,\theta) = r\sin\theta$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial r} &= \cos\theta = \frac{x}{r} \\
\frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r\sin\theta = -y \\
\frac{\partial y}{\partial r} &= \sin\theta = \frac{y}{r} \\
\frac{\partial y}{\partial \theta} &= r\cos\theta = x
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{1}{r}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= -\frac{1}{r^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} + x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) + y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{r^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial f}{\partial y} + x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{x}{r} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{y}{r}\right) + y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{x}{r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{y}{r}\right)\right) \\
&= \frac{1}{r^2}\left(x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \\
\frac{\partial g}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} &= -\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} - y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial y} + x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) \\
&= -x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} - y\left(-y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right) + x\left(-y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \\
&= -x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

Et donc on conclut

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \underbrace{\frac{x^2+y^2}{r^2}}_{=1}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{x^2+y^2}{r^2}}_{=1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \nabla^2 f$$

c) Posons

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r + \left(\arctan\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = r + (\arctan\tan)^2 = r + \theta^2$$

Alors,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = 0 + \frac{1}{r}\cdot 1 + \frac{1}{r^2}\cdot 2 = \frac{2+r}{r^2} = \nabla^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Ainsi, en posant $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, on obtient

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{2+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

Exercice 4. Révision - théorème des accroissements finis

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\Omega = B(x_0, r)$, $r > 0$. Soit $f \in C^2(\Omega)$.

a) Montrer que pour tout $x \in \Omega$

$$\nabla f(x) - \nabla f(x_0) = \int_0^1 H_f(x_0 + t(x-x_0))\cdot(x-x_0)dt$$

où le symbole $\int_0^1 dt$ représente l'intégrale composante par composante.

b) En supposant que x_0 est un point stationnaire et qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in \Omega$, $\|H_f(x)\|_F \leq M$, avec $\|\cdot\|_F$ la norme de Frobenius, montrer que pour tout $x \in \Omega$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq Mr^2.$$

Correction.

a) Pour tout $x \in \Omega$, on a $[x, x_0] \subset \Omega$. En appliquant le TAF à chaque dérivée partielle de f (observer que $\nabla f \in C^1$ puisque $f \in C^2$), on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \int_0^1 \left\langle \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0 + t(x-x_0)), x - x_0 \right\rangle dt.$$

Comme la matrice hessienne est construite de telle manière que chaque ligne est le gradient de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ pour chaque $i = 1, ..., n$, en rassemblant cette égalité par composante de $\nabla f(x) - \nabla f(x_0)$, on obtient le résultat voulu.

b) En appliquant le TAF à $f(x) - f(x_0)$, on trouve qu'il existe $c \in]x_0, x[$ tel que

$$f(x) - f(x_0) = \langle \nabla f(c), x - x_0 \rangle$$

Comme x_0 est stationnaire, on a $\nabla f(x_0) = 0$ et donc on obtient

$$f(x) - f(x_0) = \langle \nabla f(c) - \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

Par le point précédent, on a donc

$$f(x) - f(x_0) = \left\langle \int_0^1 H_f(x_0 + t(c-x_0))\cdot(c-x_0)dt, x - x_0 \right\rangle$$

Par conséquent, par Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &\leq \left\| \int_0^1 H_f(x_0 + t(c-x_0))\cdot(c-x_0)dt \right\| \|x - x_0\| \\
&\leq \left(\int_0^1 \|H_f(x_0 + t(c-x_0))\cdot(c-x_0)\| dt \right) \|x - x_0\| \\
&\leq \left(\int_0^1 \|H_f(x_0 + t(c-x_0))\|_F \|(c-x_0)\| dt \right) \|x - x_0\| \\
&\leq M\|c - x_0\|\|x - x_0\| = Mr^2
\end{aligned}$$

Exercice 5. Révision - facultatif - limite de fonctions à plusieurs variables : une autre caractérisation

Le but de cet exercice est de montrer une autre caractérisation de la limite d'une fonction à plusieurs variables, qui donne du sens à la morale "la limite en x_0 existe si et seulement si elle existe par tous les chemins possibles qui tendent vers x_0"

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $L \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si et seulement pour tout courbe $\gamma \in C^0([0,1], \mathbb{R}^n)$ telle que $\forall t \in]0,1], \gamma(t) \in D_f \setminus \{x_0\}$ et $\lim_{t \to 0^+} \gamma(t) = \gamma(0) = x_0$, on a

$$\lim_{t \to 0^+} f(\gamma(t)) = L$$

Indication : pour montrer la direction $\Leftarrow$, on utilisera la caractérisation par les suites et le fait que pour tout triplet $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, il existe toujours une courbe continue $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$ telle que $\gamma(t_1) = a, \gamma(t_2) = c$, $\gamma(t) \neq b, \forall t \in]t_1, t_2[$ et $\|\gamma(t) - b\| \leq \max(\|a - b\|, \|c - b\|), \forall t \in [t_1, t_2]$

Correction.

$\Rightarrow$: supposons que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ et soit une courbe $\gamma \in C^0([0,1], \mathbb{R}^n)$ telle que $\gamma(t) \in D_f \setminus \{x_0\}, \forall t \in]0,1]$ et telle que $\lim_{t \to 0^+} \gamma(t) = x_0$.

On doit montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 < t < \delta \Rightarrow |f(\gamma(t)) - L| < \varepsilon$$

Puisque $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\delta_0 > 0$ tel que

$$0 < \|x - x_0\| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Puisque $\lim_{t \to 0^+} \gamma(t) = x_0$ et $\gamma(t) \neq x_0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 < t < \delta \Rightarrow 0 < \|\gamma(t) - x_0\| < \delta_0.$$

D'où si $0 < t < \delta$, on a bien $|f(\gamma(t)) - L| < \varepsilon$.

$\Leftarrow$: supposons que $\lim_{t \to 0^+} f(\gamma(t)) = L$ pour toute courbe continue satisfaisant les hypothèses.

Soit $(y_k)_{k=0}^{+\infty}$ une suite telle que $y_k \in D_f \setminus \{x_0\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ et telle que $\lim_{k \to +\infty} y_k = x_0$. Montrons que $\lim_{k \to +\infty} f(y_k) = L$, ce qui prouvera par le théorème de caractérisation par les suites que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

Considérons pour tout $k = 0, 1, 2, ...$ les intervalles

$$I_k = [a_k, b_k] = \left[\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+1}\right]$$

et une courbe

$$\gamma_k : I_k \to \mathbb{R}^n$$

telle que $\gamma_k \in C^0(I_k, \mathbb{R}^n)$, $\gamma_k(a_k) = y_{k+1}, \gamma_k(b_k) = y_k$ et $\gamma_k(t) \neq x_0, \forall t \in I_k$ et telle que $\|\gamma_k(t) - x_0\| \leq \max(\|\gamma_k(a_k) - x_0\|, \|\gamma_k(b_k) - x_0\|)$

Observer que

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} I_k =]0,1]$$

.

Soit à présent la courbe $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\gamma(0) = x_0, \gamma(t) = \gamma_k(t), \text{ pour } t \in I_k, k = 0, 1, 2, ...$$

γ est continue sur $]0,1]$ puisque que tous les γ_k sont continues et coïncident sur les bords de chaque intervalle I_k. De plus, $\gamma(t) \neq x_0, \forall t \in]0,1]$ puisque les γ_k ne peuvent pas passer par x_0.

Finalement, comme $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0^+$ et $\lim_{k\to+\infty} \gamma_k(a_k) = \lim_{k\to+\infty} y_{k+1} = x_0$, on a bien que

$$\lim_{t\to 0^+} \gamma(t) = \lim_{k\to+\infty} \gamma(a_k) = \lim_{k\to+\infty} \gamma_k(a_k) = x_0 = \gamma(0)$$

et donc $\gamma \in C^0([0,1], \mathbb{R}^n)$.

On présente en détail l'argument : pour $\varepsilon > 0$ fixé, on doit montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 < t < \delta \Rightarrow \|\gamma(t) - x_0\| < \varepsilon.$$

Or comme $\lim_{k\to+\infty} \gamma_k(a_k) = \lim_{k\to+\infty} \gamma_k(b_k) = \lim_{k\to+\infty} y_k = x_0$, il existe K tel que

$$k \geq K \Rightarrow \|\gamma_k(a_k) - x_0\| < \varepsilon \text{ et } \|\gamma_k(b_k) - x_0\| < \varepsilon$$

Posons $\delta = \frac{1}{K+1}$, pour $0 < t < \delta$, soit $k \geq K$, tel que $t \in I_k$.

Or pour $k \geq K$, on a $\|\gamma_k(a_k) - x_0\| < \varepsilon$ et $\|\gamma_k(b_k) - x_0\|$, d'où pour $t \in I_k$,

$$\|\gamma(t) - x_0\| = \|\gamma_k(t) - x_0\| \leq \max(\|\gamma_k(a_k) - x_0\|, \|\gamma_k(b_k) - x_0\|) < \varepsilon.$$

Puisque que γ est une courbe satisfaisant les hypothèses de la caractérisation, on a alors

$$\lim_{t\to 0^+} f(\gamma(t)) = L$$

Finalement, on a donc puisque $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0^+$

$$\lim_{k\to+\infty} f(y_{k+1}) = \lim_{k\to+\infty} f(\gamma(a_k)) = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma(t)) = L$$

où pour l'avant dernière égalité on utilise le théorème des caractérisation par la suite pour les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appliqué à la fonction $f \circ \gamma$.

Exercice 6. Révision - facultatif - preuve du théorème des fonctions implicites par le théorème d'inversion locale

On rappelle ici le théorème d'inversion locale dans $\mathbb{R}^2$:

Théorème d'inversion locale : soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ et $(x_0, y_0) \in \Omega$ tel que $\det \nabla f(x_0, y_0) \neq 0$. Alors il existe un ouvert $U \ni (x_0, y_0)$ et un ouvert $V \ni f(x_0, y_0)$ tels que $f : U \to V$ est inversible et $f^{-1} C^1(V, U)$.

On rappelle également le Théroème des fonctions implicites en dimension 2

Théorème des fonctions implicites Soient $E \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \in C^1(E)$. Soient la courbe Γ définie par

$$\Gamma = \{(x, y) \in E | f(x, y) = 0\}$$

et $(x_0, y_0) \in \Gamma$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Alors il existe deux ouverts de $\mathbb{R}$, $U \ni x_0, V \ni y_0$ et une unique fonction $\varphi : U \to V$ telle que

$$\varphi \in C^1(U, V), \varphi(x_0) = y_0$$

et

$$\forall x \in U, f(x, \varphi(x)) = 0, \varphi'(x) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

But de l'exercice : montrer que le théorème d'inversion locale implique le théorème des fonctions implicites

Indication : travailler sous les hypothèse du Théorème des fonctions implicites, et considérer la fonction auxiliaire $g : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$ avec $g_1(x,y) = x$ et $g_2(x,y) = f(x,y)$. Puis appliquer le Théorème d'inversion locale sur g.

Correction.

Travaillons sous les hypothèses du Théorème des fonctions implicites. Considérons la fonction $g : E \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (x, f(x,y))$. Puisque $f \in C^1(E)$, on a bien que $g \in C^1(E, \mathbb{R}^2)$. De plus, on calcule

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Puisque qu'on a supposé que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y0) \neq 0$, on a bien que

$$\det \nabla g(x_0, y_0) \neq 0.$$

Par conséquent, il existe deux ouverts $O \subset E$ et $W \subset \mathbb{R}^2$ tels que $g : O \to W$ est inversible et son inverse g^{-1} appartient à $C^1(W, O)$.

Observer que comme la première composante de g est x, la première composante de g^{-1} est aussi x. D'où g^{-1} est de la forme

$$g^{-1}(x,y) = (x, h(x,y))$$

Observons de plus que si $(x,y) \in O$ est tel que $f(x,y) = 0 \iff g(x,y) = (x,0)$.

D'où pour tout

$$(x,y) \in O, f(x,y) = 0 \iff (x,y) = g^{-1}(x,0) = (x, h(x,0)) \iff y = h(x,0).$$

On pose donc $\varphi(x) = h(x,0)$. Par construction, on a bien que $y_0 = \varphi(x_0)$. On montre que φ est la fonction cherchée.

Commençons par construire les deux ouverts U, V. Observons que $(x_0, y_0) \in O$. Comme O est un ouvert, il existe $r_1, r_2 > 0$ tel que $]x_0 - r_1, x_0 + r_1[\times]y_0 - r_2, y_0 + r_2[\subset O$. Posons $U =]x_0 - r_1, x_0 + r_1[$ et $V =]y_0 - r_2, y_0 + r_2[$. Observons que pour tout $x \in U$, on a $f(x, \varphi(x)) = 0$ puisque $(x, \varphi(x)) = g^{-1}(x,0) \in O$ par construction. De plus, φ étant continue, quitte à réduire r_1, on peut supposer que $\varphi(U) \subset V$ On a donc bien que $\varphi : U \to V$, par construction $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi \in C^1(U,V)$. Finalement, on obtient la formule pour φ' en dérivant l'équation $f(x, \varphi(x)) = 0$.