Exercice 1. Echauffement - révision - fonction implicite

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\Omega)$. On considère la courbe $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ définie implicitement par
$$\Gamma = \{(x, y) \in \Omega | f(x, y) = 0\} .$$
Soit finalement $(x_0, y_0) \in \Gamma$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

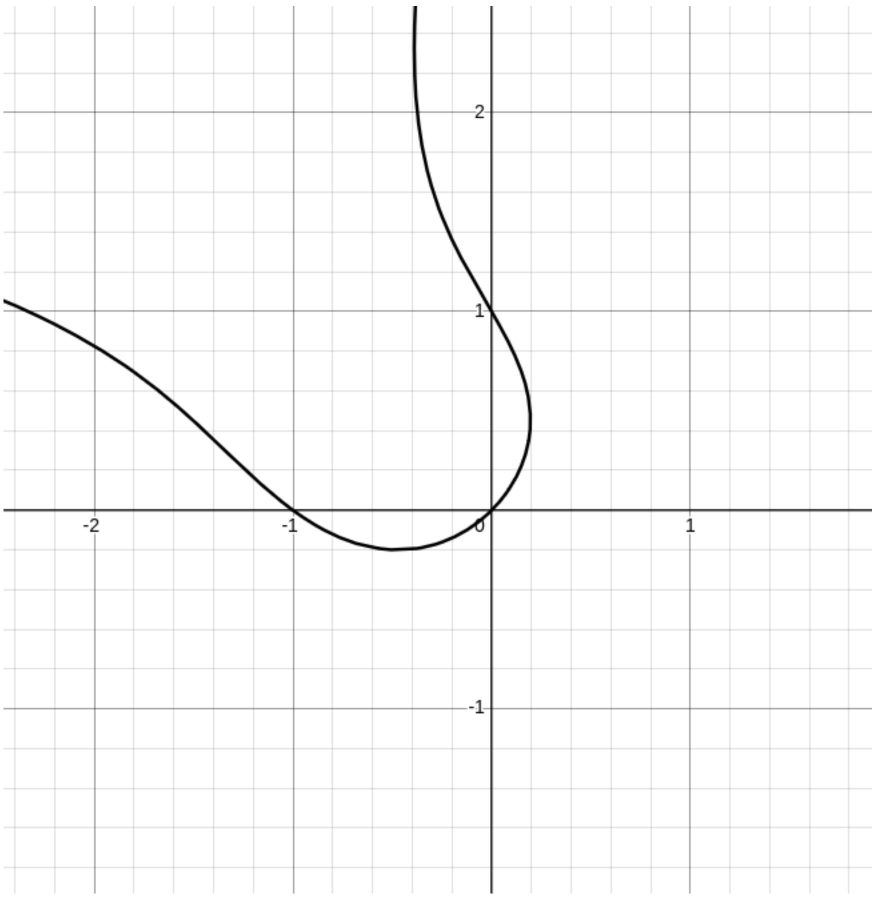
Le théorème des fonctions implicites donne l'existence et l'unicité d'une fonction $\varphi : U \to V$, avec $U \ni x_0$, $V \ni y_0$ deux ouverts tels que $\varphi \in C^1(U)$, $\varphi(x_0) = y_0$ et
$$f(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in U.$$

a) Montrer que si $f \in C^2(\Omega)$, alors $\varphi \in C^2(U)$. Indication : calculer $\varphi''(x)$, pour tout $x \in U$.

b) Supposons que l'on connait les valeurs de toutes les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f en (x_0, y_0). Donner, en terme de ces valeurs et de (x_0, y_0), le polynôme de Taylor de $\varphi(x)$ autour de $x = x_0$ à l'ordre 2

c) Appliquer le résultat précédent pour donner le polynôme de Taylor de $\varphi(x)$ autour de $x = 0$ où $\varphi(x)$ est la fonction implicite associée à la courbe d'équation
$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xe^y - ye^x = 0$$
et à $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Esquisser le graphe de ce polynôme sur le schéma ci-dessous où on a représenté la courbe $f(x, y) = 0$ dans un voisinage de $(0, 0)$:



Exercice 2. Révision - critère de la hessienne pour l'optimisation

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et $f \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ une fonction à valeur réelle. Pour $(x, y) \in \Omega$, on définit son **laplacien** $\nabla^2 f(x, y)$ comme la trace de la matrice hessienne de f, c'est-à-dire comme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

On suppose que f satisfait les hypothèses suivantes :

Hyp 1 : pour tout $(x, y) \in \Omega$, $\nabla^2 f(x, y) = 0$.

Hyp 2 : pour tout $(x, y) \in \Omega$, les valeurs propres de la matrice hessiennes sont non nulles

Montrer alors que le maximum globale de f et le minimum global de f sur $\overline{\Omega}$ sont atteints par des points $(x, y) \in \partial\Omega$ et qu'aucun point $(x, y) \in \Omega$ ne peut être un extremum global.

Remarque 1: l'opérateur laplacien $\nabla^2 f(x, y)$ est un opérateur différentiel très fréquent en mathématiques et en physique. On le retrouve par exemple en mécanique des fluides ou en thermodynamique.

Remarque 2: lorsque $\nabla^2 f(x, y) = 0$, on dit que f est harmonique. Les fonctions harmoniques ont des nombreuses utilisations dans de très vastes et variés domaines (traitement du signal, physique, analyse complexe...)

Remarque 3 : le résultat de cet exercice reste vrai (à l'exception des fonctions constantes qui atteignent leurs extrema à l'intérieur du domaine) si on retire l'hypothèse 2, mais la preuve est plus compliquée. On appelle ce résultat le "principe du maximum".

Exercice 3. Révision - règle de la chaine - laplacien en coordonnée polaire

Soit $f \in C^2(\Omega)$, où

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y > 0\right\}.$$

a) Montrer que, si on effectue le changement en coordonnées polaires

$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), r > 0, \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

et que l'on définit

$$g(r, \theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta),$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g(r,\theta)}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}{\partial y^2} \\ &= \nabla^2 f(r(\cos(\theta), r\sin(\theta)).\end{aligned}$$

Indication : calculer les dérivées partielles de g par la règle de la chaine puis calculer la quantité

$$\frac{\partial^2 g(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g(r,\theta)}{\partial \theta^2}$$

b) Calculer $\nabla^2 f(x, y)$ pour

$$f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2} + \left(\arctan\frac{y}{x}\right)^2.$$

Indication : passer en coordonnées polaires

Exercice 4. Révision - théorème des accroissements finis

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\Omega = B(x_0, r)$, $r > 0$. Soit $f \in C^2(\Omega)$.

a) Montrer que pour tout $x \in \Omega$

$$\nabla f(x) - \nabla f(x_0) = \int_0^1 H_f(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0) dt$$

où le symbole $\int_0^1 dt$ représente l'intégrale composante par composante.

b) En supposant que x_0 est un point stationnaire et qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in \Omega$, $\|H_f(x)\|_F \leq M$, avec $\|\cdot\|_F$ la norme de Frobenius, montrer que pour tout $x \in \Omega$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq Mr^2.$$

Exercice 5. Révision - facultatif - limite de fonctions à plusieurs variables : une autre caractérisation

Le but de cet exercice est de montrer une autre caractérisation de la limite d'une fonction à plusieurs variables, qui donne du sens à la morale "la limite en x_0 existe si et seulement si elle existe par tous les chemins possibles qui tendent vers x_0"

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $L \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si et seulement pour tout courbe $\gamma \in C^0([0,1], \mathbb{R}^n)$ telle que $\forall t \in]0,1], \gamma(t) \in D_f \setminus \{x_0\}$ et $\lim_{t \to 0^+} \gamma(t) = \gamma(0) = x_0$, on a

$$\lim_{t \to 0^+} f(\gamma(t)) = L$$

Indication : pour montrer la direction $\Leftarrow$, on utilisera la caractérisation par les suites et le fait que pour tout triplet $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, il existe toujours une courbe continue $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$ telle que $\gamma(t_1) = a, \gamma(t_2) = c$, $\gamma(t) \neq b, \forall t \in]t_1, t_2[$ et $\|\gamma(t) - b\| \leq \max(\|a - b\|, \|c - b\|), \forall t \in [t_1, t_2]$

Exercice 6. Révision - facultatif - preuve du théorème des fonctions implicites par le théorème d'inversion locale

On rappelle ici le théorème d'inversion locale dans $\mathbb{R}^2$:

Théorème d'inversion locale : soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ et $(x_0, y_0) \in \Omega$ tel que $\det \nabla f(x_0, y_0) \neq 0$. Alors il existe un ouvert $U \ni (x_0, y_0)$ et un ouvert $V \ni f(x_0, y_0)$ tels que $f : U \to V$ est inversible et $f^{-1}C^1(V, U)$.

On rappelle également le Théroème des fonctions implicites en dimension 2

Théorème des fonctions implicites Soient $E \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \in C^1(E)$. Soient la courbe Γ définie par

$$\Gamma = \{(x, y) \in E | f(x, y) = 0\}$$

et $(x_0, y_0) \in \Gamma$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Alors il existe deux ouverts de $\mathbb{R}$, $U \ni x_0, V \ni y_0$ et une unique fonction $\varphi : U \to V$ telle que

$$\varphi \in C^1(U, V), \varphi(x_0) = y_0$$

et

$$\forall x \in U, f(x, \varphi(x)) = 0, \varphi'(x) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

But de l'exercice : montrer que le théorème d'inversion locale implique le théorème des fonctions implicites

Indication : travailler sous les hypothèse du Théorème des fonctions implicites, et considérer la fonction auxiliaire $g : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$ avec $g_1(x, y) = x$ et $g_2(x, y) = f(x, y)$. Puis appliquer le Théorème d'inversion locale sur g.

Réponses

Exercice 1. a)

$$\varphi''(x) = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3},$$

où l'argument des fonctions dérivées partielles est $(x, \varphi(x))$.
c) Le polynôme de Taylor de $\varphi(x)$ autour de $x = 0$ est $p_2(x) = x + 2x^2$.