

Exercice 1. Fonction implicite en dimension 2

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \cos(\pi x) \sin(y) + \sin(\pi x)$$

et $(x_0, y_0) = (1, 0)$. L'équation $f(x, y) = 0$ définit une fonction $y = g(x)$ telle que $g(x_0) = y_0$ et $f(x, g(x)) = 0$ dans un voisinage de $x = 1$.

Calculer $g'(x_0)$.

Correction.

Soit on utilise la formule du théorème des fonctions implicites, soit on retrouve la formule :

$$\begin{aligned} f(x, g(x)) &= 0 \\ \Rightarrow (f(x, g(x)))' &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))g'(x) &= 0. \end{aligned}$$

En évaluant en $x = x_0 = 1$, on a $g(x_0) = y_0 = 0$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)g'(1) = 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\pi \sin(\pi x) \sin(y) + \pi \cos(\pi x) & \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) &= -\pi \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \cos(\pi x) \cos(y) & \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) &= -1. \end{aligned}$$

On conclut

$$-\pi - 1 \cdot g'(1) = 0 \Rightarrow g'(1) = -\pi.$$

Exercice 2. Fonction implicite en dimension 2

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (x - y)e^{xy}$$

et $(x_0, y_0) = (1, 0)$. L'équation $f(x, y) = 1$ définit une fonction $x = g(y)$ telle que $g(y_0) = x_0$ et $f(g(y), y) = 1$ dans un voisinage de $y = 0$.

Calculer $g'(y_0)$.

Correction.

Soit on utilise la formule du théorème des fonctions implicites, soit on retrouve la formule :

$$\begin{aligned} f(g(y), y) &= 1 \\ \Rightarrow (f(g(y), y))' &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(g(y), y)g'(y) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(y), y) &= 0. \end{aligned}$$

En évaluant en $y = y_0 = 0$, on a $g(y_0) = x_0 = 1$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)g'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= e^{xy} + y(x - y)e^{xy} & \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -e^{xy} + x(x - y)e^{xy} & \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) &= 0.\end{aligned}$$

On conclut

$$g'(0) + 0 = 0 \Rightarrow g'(0) = 0.$$

Exercice 3. Fonction implicite en dimension 3

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = 2x^2 + e^{xz-2} + 3yx$$

et $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 2)$.

L'équation $f(x, y, z) = 0$ définit une fonction $z = g(x, y)$ telle que $g(x_0, y_0) = z_0$ et $f(x, y, g(x, y)) = 0$ dans un voisinage de $(x_0, y_0) = (1, -1)$.

Calculer $\frac{\partial g}{\partial y}(1, -1)$.

Correction.

Soit on réutilise la formule du théorème des fonctions implicites, ou on la retrouve :

$$\begin{aligned}f(x, y, g(x, y)) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} [f(x, y, g(x, y))] &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, g(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= 0\end{aligned}$$

En évaluant en $(x, y) = (x_0, y_0) = (1, -1)$, on a $g(1, -1) = 2$ et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1, 2) + \frac{\partial f}{\partial z}(1, -1, 2) \frac{\partial g}{\partial y}(1, -1) = 0$$

De plus,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= 3x & \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1, 2) &= 3 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= e^{xz-2}x & \frac{\partial f}{\partial z}(1, -1, 2) &= 1\end{aligned}$$

On conclut,

$$3 + \frac{\partial g}{\partial y}(1, -1) = 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(1, -1) = -3.$$

Exercice 4. Fonction implicite en dimension 3

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + \sin(xy) + z$$

et $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 4)$.

L'équation $f(x, y, z) = 5$ définit une fonction $y = g(x, z)$ telle que $g(x_0, z_0) = y_0$ et $f(x, g(x, z), z) = 5$ dans un voisinage de $(x_0, z_0) = (1, 4)$.

Calculer $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 4)$.

Correction.

Soit on réutilise la formule du théorème des fonctions implicites, ou, on la retrouve :

$$\begin{aligned} f(x, g(x, z), z) &= 5 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} [f(x, g(x, z), z)] &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x, z), z) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x, z), z) \frac{\partial g}{\partial x}(x, z) &= 0 \end{aligned}$$

En évaluant en $(x, z) = (x_0, z_0) = (1, 4)$, on a $g(1, 4) = 0$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0, 4) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0, 4) \frac{\partial g}{\partial x}(1, 4) = 0$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 2x + y \cos(xy) & \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0, 4) &= 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= x \cos(xy) & \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0, 4) &= 1 \end{aligned}$$

On conclut,

$$2 + \frac{\partial g}{\partial x}(1, 4) = 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(1, 4) = -2.$$

Exercice 5. Equation de la tangente à une courbe donnée implicitement

Soit l'ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + e^y = 2\}.$$

Donner l'équation de la tangente à D au point $(1, 0)$.

Correction.

L'équation de la tangente à un ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ au point (x_0, y_0) est donné par

$$\langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle = 0.$$

Ici on choisit $f(x, y) = x + e^y - 2$. On a $\nabla f(x, y) = (1, e^y) \Rightarrow \nabla f(1, 0) = (1, 1)$ d'où l'équation de la tangente t au point $(1, 0)$ est donnée par

$$t : \langle (1, 1), (x - 1, y) \rangle = 0 \Leftrightarrow t : y = 1 - x.$$

Exercice 6. Equation du plan tangent à une surface donnée implicitement

Pour les ensembles $S \subset \mathbb{R}^3$ ci-dessous, donner l'équation du plan tangent à S en $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 4\}$, $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, -2)$.

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \cos(\pi x) + x^2 y + 3e^{xz} + yz = 23\}$, $(x_0, y_0, z_0) = (3, 2, 0)$.

Correction.

a) L'équation du plan tangent à $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$ au point $(x_0, y_0, z_0) \in S$ est donnée par

$$\langle \nabla f(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$$

Ici, on choisit $f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}z^2 - 4$. On a

$$\nabla f(x, y, z) = \left(2x, y, \frac{1}{2}z \right)$$

$$\nabla f(-1, 2, -2) = (-2, 2, -1).$$

Ainsi, l'équation du plan tangent est

$$\langle (-2, 2, -1), (x + 1, y - 2, z + 2) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x - 2 + 2y - 4 - z - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2y - z - 8 = 0$$

b) L'équation du plan tangent à $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$ au point $(x_0, y_0, z_0) \in S$ est donnée par

$$\langle \nabla f(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$$

Ici, on choisit $f(x, y, z) = \cos(\pi x) + x^2 y + 3e^{xz} + yz - 23$. On a

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= (2\pi \sin(\pi x) + 2xy + 3ze^{xz}, x^2 + z, 3xe^{xz} + y) \\ \nabla f(3, 2, 0) &= (0 + 12 + 0, 9 + 0, 9 + 2) = (12, 9, 11). \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation du plan tangent est

$$\begin{aligned} \langle (12, 9, 11), (x - 3, y - 2, z) \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow 12x - 36 + 9y - 18 + 11z &= 0 \\ \Leftrightarrow 12x + 9y + 11z - 54 &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 7. Exercice de révision - recherche des extrema globaux

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x + 2)(y - 1)$ et le triangle D de sommet $(-1, 0)$, $(2, 3)$ et $(-2, 4)$.

Déterminer le minimum global et le maximum global de f sur D .

Indication : commencer par dessiner le domaine D dans un repère Oxy . Ceci sera utile quand il s'agira de déterminer si un point appartient ou non au triangle.

Correction.

On procède par étape :

Etape 1 : la fonction est continue sur le triangle qui est fermé et borné. Par conséquent, les extrema globaux existent.

Etape 2 : on cherche les candidats possibles parmi :

- Les points stationnaires à l'intérieur de D pour lesquels on applique le critère de la Hessienne pour déterminer si ce sont des extrema locaux.
- Les points où f n'est pas différentiable.
- Les sommets de D et les points stationnaires du bord.

Commençons par rechercher les points de catégorie (a). On calcule :

$$\nabla f(x, y) = (y - 1, x + 2) = (0, 0) \Leftrightarrow x = -2 \text{ et } y = 1.$$

Il y a un seul point stationnaire qui est $(-2, 1)$. Ce point n'appartient pas à D . On ne va donc pas le considérer.

Il n'y a pas non plus de points de catégorie (b), comme f est différentiable sur \mathbb{R}^2 .

Il reste à étudier les points du bord. Pour cela on paramétrise chaque segment :

- Arête $(-1, 0) - (2, 3)$: $\gamma_1(t) = t(-1, 0) + (1 - t)(2, 3) = (2 - 3t, 3 - 3t), t \in [0, 1]$
- Arête $(2, 3) - (-2, 4)$: $\gamma_2(t) = t(2, 3) + (1 - t)(-2, 4) = (4t - 2, -t + 4), t \in [0, 1]$
- Arête $(-2, 4) - (-1, 0)$: $\gamma_3(t) = t(-2, 4) + (1 - t)(-1, 0) = (-1 - t, 4t), t \in [0, 1]$

On évalue f sur le bord. On a

- $f_1(t) = f(\gamma_1(t)) = (4 - 3t)(2 - 3t), t \in [0, 1]$
- $f_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 4t(3 - t), t \in [0, 1]$
- $f_3(t) = f(\gamma_3(t)) = (1 - t)(4t - 1), t \in [0, 1]$

On recherche les points stationnaires du bord :

- $\frac{d}{dt}f_1(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \rightsquigarrow f(\gamma_1(1)) = f(-1, 0) = -1$
- $\frac{d}{dt}f_2(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3/2 \notin [0, 1] \rightsquigarrow$ on ne le considère pas
- $\frac{d}{dt}f_3(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5/8 \rightsquigarrow f(\gamma_3(5/8)) = f(-13/8, 5/2) = 9/16.$

Finalement on évalue encore dans les sommets. On a déjà calculé $f(-1, 0)$. On a aussi

$$f(2, 3) = 8 \text{ et } f(-2, 4) = 0.$$

Etape 3 : on compare les valeurs : $f(2, 3) = 8$ et $f(-1, 0) = -1$. Le maximum global est donc en $(2, 3)$ et le minimum global en $(-1, 0)$.

Exercice 8. Exercice de révision - nature d'un point stationnaire

Donner la nature des points stationnaires de la fonction $f(x, y) = x(x^4 - 80) - y(y^3 + 108)$.

Correction.

On calcule le gradient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5x^4 - 80 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -4y^3 - 108$$

d'où les points stationnaires sont donnés par

$$5x^4 - 80 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \text{ et } -4y^3 - 108 = 0 \Leftrightarrow y = -3.$$

On a donc deux points stationnaires : $(2, -3)$ et $(-2, -3)$.

On détermine leur nature à l'aide du critère de la Hessienne :

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 20x^3 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$H(f)(2, -3) = \begin{pmatrix} 160 & 0 \\ 0 & -108 \end{pmatrix}, H(f)(-2, -3) = \begin{pmatrix} -160 & 0 \\ 0 & -108 \end{pmatrix}.$$

On a alors

- en $(2, -3)$: $\det H(f)(2, -3) = 160 \cdot (-108) < 0$: $(2, -3)$ est un point selle.
- en $(-2, -3)$: $\det H(f)(-2, -3) = -160 \cdot (-108) > 0$ et $-160 < 0$: $(-2, -3)$ est un point à maximum local.