Exercice 1. Fonction implicite en dimension 2

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \cos(\pi x)\sin(y) + \sin(\pi x)$$

et $(x_0, y_0) = (1, 0)$. L'équation $f(x,y) = 0$ définit une fonction $y = g(x)$ telle que $g(x_0) = y_0$ et $f(x, g(x)) = 0$ dans un voisinage de $x = 1$.

Calculer $g'(x_0)$.

Exercice 2. Fonction implicite en dimension 2

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x-y)e^{xy}$$

et $(x_0, y_0) = (1, 0)$. L'équation $f(x,y) = 1$ définit une fonction $x = g(y)$ telle que $g(y_0) = x_0$ et $f(g(y), y) = 1$ dans un voisinage de $y = 0$.

Calculer $g'(y_0)$.

Exercice 3. Fonction implicite en dimension 3

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = 2x^2 + e^{xz-2} + 3yx$$

et $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 2)$.

L'équation $f(x,y,z) = 0$ définit une fonction $z = g(x,y)$ telle que $g(x_0, y_0) = z_0$ et $f(x, y, g(x,y)) = 0$ dans un voisinage de $(x_0, y_0) = (1, -1)$.

Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, -1)$.

Exercice 4. Fonction implicite en dimension 3

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = x^2 + \sin(xy) + z$$

et $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 4)$.

L'équation $f(x,y,z) = 5$ définit une fonction $y = g(x,z)$ telle que $g(x_0, z_0) = y_0$ et $f(x, g(x,z), z) = 5$ dans un voisinage de $(x_0, z_0) = (1, 4)$.

Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 4)$.

Exercice 5. Equation de la tangente à une courbe donnée implicitement

Soit l'ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + e^y = 2\right\}.$$

Donner l'équation de la tangente à D au point $(1, 0)$.

Exercice 6. Equation du plan tangent à une surface donnée implicitement

Pour les ensembles $S \subset \mathbb{R}^3$ ci-dessous, donner l'équation du plan tangent à S en $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

a) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 4\right\}$, $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, -2)$.

b) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ -2\cos(\pi x) + x^2 y + 3e^{xz} + yz = 23\right\}$, $(x_0, y_0, z_0) = (3, 2, 0)$.

Exercice 7. Exercice de révision - recherche des extrema globaux

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x+2)(y-1)$ et le triangle D de sommet $(-1, 0)$, $(2, 3)$ et $(-2, 4)$.

Déterminer le mininum global et le maximum global de f sur D.

Indication : commencer par dessiner le domaine D dans un repère Oxy. Ceci sera utile quand il s'agira de déterminer si un point appartient ou non au triangle.

Exercice 8. Exercice de révision - nature d'un point stationnaire

Donner la nature des points stationnaires de la fonction $f(x, y) = x(x^4 - 80) - y(y^3 + 108)$.

Réponses

Exercice 1.
$g'(1) = -\pi$.
Exercice 2.
$g'(0) = 0$.
Exercice 3.
$\frac{\partial g}{\partial y}(1, -1) = -3$.
Exercice 4.
$\frac{\partial g}{\partial x}(-1, 4) = -2$.
Exercice 5.
$y = 1 - x$.
Exercice 6.

a) $2x - 2y + z + 8 = 0$.

b) $12x + 9y + 11z - 54 = 0$.

Exercice 7.
Le point $(2, 3)$ est le maximum global de f sur D, de valeur $f(2, 3) = 8$. Le point $(-1, 0)$ est le minimum global de f sur D, de valeur $f(-1, 0) = -1$.
Exercice 8.
Le point $(2, -3)$ est un point selle de f, tandis que le point $(-2, -3)$ est un maximum local de f.