Attention : il y a une patafe en introduction de cette série en guise d'échauffement:)

Le but de cette série est de procéder à la preuve du théorème d'inversion locale. La définition qui suit, de même que l'énoncé et le résultat du théorème sont à connaître, de même que les rappels qui sont en préambule. Sa démonstration n'est pas à connaître et est séparée dans les 8 exercices ci-dessous, qui sont tous **facultatifs** .

On rappelle tout d'abord la définition d'un **difféomorphisme local** de classe C^1.

Définition :

Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : E \to \mathbb{R}^n$ une fonction (vectorielle) et $x_0 \in E$. On dit que f est un difféomorphisme local en x_0 de classe C^1 si

a) Il existe un ouvert U, tel que $x_0 \in U$, et un ouvert $V \subset \mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) \in V$ tels que $f : U \to V$ est inversible (autrement dit f est une bijection de U vers V)

b) $f \in C^1(U, V)$

c) $f^{-1} \in C^1(V, U)$

Le Théorème d'inversion locale s'énonce alors comme

Théorème d'inversion locale

Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, une fonction $f : E \to \mathbb{R}^n$ telle que $f \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$ et $x_0 \in E$. Si $\det(\nabla f(x_0)) \neq 0$, alors f est un difféomorphisme local de classe C^1 en x_0 : c'est-à-dire qu'il existe des ouverts $U \ni x_0$, $V \ni f(x_0)$ tels que $f : U \to V$ inversible, $f \in C^1(U, V)$ et $f^{-1} \in C^1(V, U)$. De plus, pour tout $y \in V$, on a

$$\nabla f^{-1}(y) = \Big(\nabla f(f^{-1}(y))\Big)^{-1}$$

Dans cette série, on va démontrer en plusieurs étapes ce théorème. L'idée est de tout d'abord montrer que f est inversible dans des voisinages de x_0 et $f(x_0)$, c'est-à-dire que dans ces voisinages, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution x^*. En effet, s'il existe une solution de cette équation, alors f est surjective, et si cette solution est unique, alors f est injective. On pourra alors définir la réciproque f^{-1} par $f^{-1}(y) = x^*$. Puis on montre que cette réciproque est continûment différentiable. Cela se fait en trois étapes qui sont les suivantes :

Etape 1 On montre qu'il existe $r, \tilde{r} > 0$ tel que pour $\forall y \in B(f(x_0), \tilde{r})$, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution $x \in B(x_0, r)$.

Etape 2 Par la suite, en posant $V = B(f(x_0), \tilde{r})$ et $U = B(x_0, r) \cap f^{-1}(V)$,on obtient que $f : U \to V$ est une bijection et on peut définir son inverse $f^{-1} : V \to U$. De plus, on montre que $f^{-1} \in C^0(V, U)$.

Etape 3 On montre finalement que $f^{-1} \in C^1(V, U)$ et que $\nabla f^{-1}(y) = \Big(\nabla f(f^{-1}(y))\Big)^{-1}$ pour tout $y \in V$

Observer au passage, que dans cette étape, on ne montre pas que $f \in C^1(U, V)$ (comme nécessaire dans la définition d'un difféomorphisme) car c'est immédiatement garanti par l'hypothèse que $f \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$. On doit donc juste montrer que la réciproque est aussi C^1.

Avant de se lancer dans la preuve, voici quelques rappels utiles, vus dans différentes séries :

Rappel 1 : norme d'une matrice (voir série 1-A)

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, on note $\|A\|_F$ sa norme de Frobenius définie par

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^2}$$

qui satisfait en particulier que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|Ax\| \leq \|A\|_F \|x\|$$

où $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ est le norme euclidienne du vecteur.

Rappel 2 : fonction Lipschitz (voir série 4-A)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On dit que f est Lipschitz de constante $L \geq 0$ si pour tout $x, y \in E$, on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Une fonction Lipschitz est toujours continue. Si $L < 1$, on dit que f est strictement contractante sur E.

Rappel 3 : point fixe de Banach (voir série 4-A pour la version dans $\mathbb{R}^n$)
Soit $f : K \to \mathbb{R}^n$, avec $K \subset \mathbb{R}^n$ un fermé, une fonction telle que

- $f(K) \subset K$
- f est strictement contractante sur K

  Alors il existe un unique $x^* \in K$ tel que $f(x^*) = x^*$ (on dit que x^* est un point fixe).

Rappel 4 : inégalité du triangle pour l'intégrale d'une fonction vectorielle (voir série 6-A)
Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$. Alors

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

Rappel 5 : caractérisation de la continuité
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : E \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Alors si $F \subset \mathrm{Im} f$ est un ouvert, sa pré-image $f^{-1}(F)$ est un ouvert. (Ceci est une conséquence directe de la définition $\varepsilon - \delta$).)

Pour tout ce qui suit (fin de la patafe), on travaille sous les hypothèse du thèorème d'inversion local, c'est-à-dire $f \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$ et $\det(\nabla f(x_0))) \neq 0$, c'est-à-dire que la matrice jacobienne $\nabla f(x_0)$ est inversible. On notera $(\nabla f(x_0))^{-1}$ la matrice inverse et les produits matrice-vecteur par le point médian $\cdot$

Le but des 4 premiers exercices est de montrer l'étape 1 de la preuve, c'est-à-dire qu'il existe des voisinages de x_0 et $f(x_0)$ pour lesquels l'équation $f(x) = y$ à une unique solution x dans le voisinage de x_0 pour tout y dans le voisinage de $f(x_0)$.

Exercice 1. Etape 1 - partie 1
Soit $y \in \mathbb{R}^n$ fixé. On définit la fonction $\varphi^y : E \to \mathbb{R}^n$ par

$$\varphi^y(x) = x - (\nabla f(x_0))^{-1} \cdot (f(x) - y).$$

Montrer que

$$x \text{ est une solution de } f(x) = y \iff \varphi^y(x) = x.$$

Correction.

$\Rightarrow$ Si x est une solution de $f(x) = y$, alors on $f(x) - y = 0$, et donc $\varphi^y(x) = x$.

$\Leftarrow$ Puisque la matrice $\nabla f(x_0)$ est inversible, son noyau et celui de son inverse ne contiennent que le vecteur nul. Par conséquent si

$$\varphi^y(x) = x \Rightarrow (\nabla f(x_0))^{-1} \cdot (f(x) - y) = 0 \Rightarrow f(x) - y = 0 \Rightarrow f(x) = y$$

Exercice 2. Etape 1 - partie 2

Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in \overline{B}(x_0, r)$, on a

- $x \in E$
- chaque composante de la matrice $D = I - (\nabla f(x_0))^{-1}\nabla f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{-1}{2n}, \frac{1}{2n}\right]$, où on a noté I la matrice identité dans $\mathbb{R}^n$, (N.B. le n de l'intervalle est le n de $\mathbb{R}^n$ et est une grandeur fixe)
- $\det \nabla f(x) \neq 0$

Correction.

Comme E est ouvert, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $B(x_0, \delta_1) \subset E$. De plus, comme $f \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$, l'application $x \to \det \nabla f(x)$ est une application continue sur E, qui ne s'annule pas en x_0. Il existe donc $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, \delta_2)$, $\det \nabla f(x) \neq 0$.

Finalement, chaque composante de la matrice D est une application continue de $E \to \mathbb{R}$, qui s'annule en x_0. Il existe donc $\delta_3 > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, \delta_3)$ chaque composante appartient à $\left[\frac{-1}{2n}, \frac{1}{2n}\right]$.

En posant $r < \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, on a le résultat voulu.

Exercice 3. Etape 1 - partie 3

Soient le $r > 0$ obtenu dans l'exercice précédent et $y \in \mathbb{R}^n$ fixé. Montrer que pour tout $x_1, x_2 \in \overline{B}(x_0, r)$, l'application φ^y satisfait

$$\|\varphi^y(x_1) - \varphi^y(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Indication : observer que $\varphi^y \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$ utiliser le théorème des accroissements finis sous forme intégrale.

Correction.

Pour $x_1, x_2 \in \overline{B}(x_0, r)$, on a $[x_1, x_2] \subset \overline{B}(x_0, r) \subset E$ et donc par le TAF

$$\begin{aligned}
\|\varphi^y(x_1) - \varphi^y(x_2)\| &= \left\| \int_0^1 \nabla\varphi^y(x_1 + t(x_2 - x_1)) \cdot (x_2 - x_1)\mathrm{d}t \right\| \\
&\leq \int_0^1 \left\| \nabla\varphi^y(x_1 + t(x_2 - x_1)) \cdot (x_2 - x_1) \right\| \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \|\nabla\varphi^y(x_1 + t(x_2 - x_1))\|_F \|x_2 - x_1\| \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Par la règle de la chaine, on a

$$\nabla\varphi^y(x) = I - (\nabla f(x_0)^{-1}\nabla f(x).$$

Or comme $x_1 + t(x_2 - x_1) \in \overline{B}(x_0, r)$, on a que chaque composante de la matrice $I - (\nabla f(x_0)^{-1}\nabla f(x_1 + t(x_2 - x_1)))$ est comprise dans l'intervalle $\left[\frac{-1}{2n}, \frac{1}{2n}\right]$, d'où on peut majorer

$$\|\nabla\varphi^y(x_1 + t(x_2 - x_1))\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} (\nabla\varphi^y(x_1 + t(x_2 - x_1)))_{ij}^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{4n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Donc finalement, on obtient

$$\|\varphi^y(x_1) - \varphi^y(x_2)\| \leq \int_0^1 \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\|\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\|$$

Exercice 4. Etape 1 - partie 4

Soit le $r > 0$ des exercices précédents, posons $\tilde{r} = \frac{r}{2\|(\nabla f(x_0))^{-1}\|_F}$. Pour $y \in B(f(x_0), \tilde{r})$, considérons l'application $\varphi^y : \overline{B}(x_0, r) \to \mathbb{R}^n$, où φ^y est définie comme dans l'exercice 1. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer que $\varphi^y(\overline{B}(x_0, r)) \subset B(x_0, r)$ et en déduire que pour $y \in B(f(x_0), \tilde{r})$, il existe un unique $x^* \in B(x_0, r)$ solution de l'équation $f(x^*) = y$.

Correction.

Soit $y \in B(f(x_0), \tilde{r})$. Il faut montrer que pour tout $x \in \overline{B}(x_0, r)$, on a

$$\|\varphi^y(x) - x_0\| < r$$

Par l'inégalité du triangle, on a

$$\begin{aligned}\|\varphi^y(x) - x_0\| &\leq \|\varphi^y(x) - \varphi^y(x_0)\| + \|\varphi^y(x_0) - x_0\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x - x_0\| + \|(\nabla f(x_0))^{-1} \cdot (f(x_0) - y)\| \leq \frac{r}{2} + \|(\nabla f(x_0))^{-1}\|_F \underbrace{\|f(x_0) - y)\|}_{<\tilde{r}} < r\end{aligned}$$

Pour $y \in B(f(x_0), \tilde{r})$, l'application φ^y satifait donc que

- $\varphi^y(\overline{B}(x_0, r)) \subset B(x_0, r) \subset \overline{B}(x_0, r)$
- φ^y est strictement contractante

Par le Théorème du point fixe de Banach (Rappel 4), pour tout $y \in B(f(x_0), \tilde{r})$, il existe donc un unique $x^* \in \overline{B}(x_0, r)$ tel que $\varphi^y(x^*) = x^* \iff f(x^*) = y$. De plus comme $\varphi^y(x^*) \in B(x_0, r)$, on peut conclure qu'en fait $x^* \in B(x_0, r)$.

Les prochains exercices permettent de montrer l'étape 2 de le preuve, c'est-à-dire qu'il existe deux ouverts $U, V \in \mathbb{R}^n$ tel que $f : U \to V$ est inversible, c'est-à-dire qu'on peut définir sa réciproque $f^{-1} : V \to U$. De plus, on montre que f^{-1} est continue.

Exercice 5. Etape 2 - partie 1

Soient $r > 0$ et $\tilde{r} > 0$ donné dans les exercices ci-dessus. Soit $V = B(f(x_0), \tilde{r})$ et $U = B(x_0, r) \cap f^{-1}(V) = \{x \in B(x_0, r) | f(x) \in B(f(x_0), \tilde{r})\}$. Montrer que U, V sont des ouverts et que $f : U \to V$ est inversible, c'est-à-dire que f est injective sur U et surjective dans V.

Correction.

V est ouvert par construction. De plus, $f^{-1}(V)$ est ouvert car f est continue, on a donc que $U = B(x_0, r) \cap f^{-1}(V)$ est ouvert car intersection finie d'ouverts.

Par l'étape 1, U est non vide et $f(U) = V$. En effet, pour tout $y \in V$, l'équation $f(x) = y$ a au moins une solution, donc y a au moins une pré-image dans U, donc $V \subset f(U)$ et de plus par construction $f(U) \subset V$.

Finalement, par l'étape 1 à nouveau, pour tout $y \in V$, sa pré-image x^* dans U est en fait unique, donc f est injective.

La fonction $f : U \to V$ est donc à la fois injective et surjective, donc inversible.

Exercice 6. Etape 2 - partie 2

Pour U, V comme dans l'exercice précédent, on définit $f^{-1} : V \to U$ la réciproque de f. Montrer que $f^{-1} : V \to U$ est Lipschitz, et donc continue.

Indication : pour $y_1, y_2 \in V$, poser $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$ et utiliser que par construction de f^{-1}, ils satisfont les équations $\varphi^{y_1}(x_1) = x_1$ et $\varphi^{y_2}(x_2) = x_2$.

Correction.

Soient $y_1, y_2 \in V = B(f(x_0), \tilde{r})$, on a

$$\begin{aligned}
\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| = \|\varphi^{y_1}(x_1) - \varphi^{y_2}(x_2)\| &\leq \|\varphi^{y_1}(x_1) - \varphi^{y_1}(x_2)\| + \|\varphi^{y_1}(x_2) - \varphi^{y_2}(x_2)\| \\
&\underbrace{\leq}_{\varphi^{y_1} \text{ est Lipschitz}} \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + \|(\nabla f(x_0))^{-1}(y_1 - y_2)\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + \|(\nabla f(x_0))^{-1}\|_F \|y_1 - y_2\| \\
&= \frac{1}{2}\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| + \|(\nabla f(x_0))^{-1}\|_F \|y_1 - y_2\|
\end{aligned}$$

Donc on a en fait

$$\frac{1}{2}\|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)\| \leq \|(\nabla f(x_0))^{-1}\|_F\|y_1-y_2\| \iff \|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)\| \leq 2\|(\nabla f(x_0))^{-1}\|_F\|y_1-y_2\|$$

D'où f^{-1} est Lipschitz, de constante $L = 2\|(\nabla f(x_0))^{-1}\|_F$. Donc continue.

Finalement, le dernier exercice permet de montrer l'étape 3 de la preuve, à savoir que $f^{-1} \in C^1(U, V)$ et que $\nabla f^{-1}(y) = \Big(\nabla f(f^{-1}(y))\Big)^{-1}$ pour tout $y \in V$

Exercice 7. Etape 3 - partie 1

Montrer que $f^{-1} : V \to U$ est différentiable pour tout $y \in V$ et que sa jacobienne est donnée par

$$\nabla f^{-1}(y) = \Big(\nabla f(f^{-1}(y))\Big)^{-1}.$$

Indication : utiliser que pour tout $f : E \to \mathbb{R}^n$ différentiable sur l'ouvert E, on a pour tout $x, z \in E$

$$f(z) = f(x) + \nabla f(x) \cdot (z - x) + r_f(z), \text{ avec } r_f : E \to \mathbb{R}^n, \lim_{z \to x} \frac{\|r_f(z)\|}{\|z - x\|} = 0.$$

Correction.

Soient $y \in V$. Si on montre que pour tout $w \in V$, on a

$$f^{-1}(w) = f^{-1}(y) + L \cdot (w - y) + R(w)$$

avec la matrice $L = (\nabla f(f^{-1}(y))^{-1}$ et $R(w) = o(\|w-y\|)$, on a aura à la fois que f^{-1} est différentiable en y et que sa jaocbienne $\nabla f^{-1}(y)$ est donnée par $(\nabla f(f^{-1}(y))^{-1}$.

Soient $x = f^{-1}(y) \in U$ et $z = f^{-1}(w) \in U$. L'application f étant différentiable sur U, on a

$$f(z) = f(x) + \nabla f(x) \cdot (z - x) + r_f(z), \quad r_f(z) = o(\|z - x\|).$$

Comme pour tout $x \in U$, $\det \nabla f(x) \neq 0$ (voir exercice 2), la jacobienne $\nabla f(x)$ est inversible, et donc on peut écrire

$$\begin{aligned}
f(z) = f(x) + \nabla f(x) \cdot (z - x) + r_f(z) &\iff f(z) - f(x) - r_f(z) = \nabla f(x) \cdot (z - x) \\
&\iff (\nabla f(x))^{-1}(f(z) - f(x)) - \nabla f(x))^{-1} r_f(z) = z - x \\
&\iff (\nabla f(f^{-1}(y)))^{-1}(w - y) \underbrace{-\nabla f(x))^{-1} r_f(z)}_{=R(w)} = f^{-1}(w) - f^{-1}(y) \\
&\iff f^{-1}(w) = f^{-1}(y) + (\nabla f(f^{-1}(y)))^{-1}(w - y) + R(w)
\end{aligned}$$

Si on montre que

$$\lim_{w \to y} \frac{\|R(w)\|}{\|w - y\|} = 0$$

la preuve est terminée.

Or on a

$$\begin{aligned}
\lim_{w\to y} \frac{\|R(w)\|}{\|w-y\|} &= \lim_{w\to y} \frac{\|\nabla f(x))^{-1} r_f(z)\|}{\|w-y\|} \\
&\le \lim_{w\to y} \frac{\|\nabla f(x))^{-1}\|_F \|r_f(z)\|}{\|z-x\|} \frac{\|z-x\|}{\|y-w\|} \\
&= \lim_{w\to y} \|\nabla f(x))^{-1}\|_F \frac{\|r_f(z)\|}{\|z-x\|} \frac{\|f^{-1}(w)-f^{-1}(y)\|}{\|y-w\|} \\
&\le \lim_{w\to y} \|\nabla f(x))^{-1}\|_F \frac{\|r_f(z)\|}{\|z-x\|} \frac{2\|(\nabla f(x_0))^{-1}\|_F \|w-y\|}{\|y-w\|} \\
&= 2\|\nabla f(x))^{-1}\|_F \|\nabla f(x_0))^{-1}\|_F \lim_{z\to x} \frac{\|r_f(z)\|}{\|z-x\|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

où on a utilisé pour les dernières étapes que f^{-1} est Lipschitz de constante $2\|\nabla f(x_0))^{-1}\|_F$ (cf exercice 6) et que $z \to x$ si $w \to y$ puisque f^{-1} est continue.

Exercice 8. Etape 3 - partie 2

Montrer que toutes les dérivées partielles de f^{-1} sont continues dans V, autrement dit f^{-1} est continûment différentiable dans V.

Correction.

On sait que pour $y \in V$, la jacobienne $\nabla f^{-1}(y)$ est égale à $\Big(\nabla f(f^{-1}(y))\Big)^{-1}$.

La formule de l'inverse d'une matrice nous dit que

$$\Big(\nabla f(f^{-1}(y))\Big)^{-1} = \frac{1}{\det \nabla f(f^{-1}(y))} M$$

où M est une matrice dont les coefficients sont des sommes-produits des coefficients de $\nabla f(f^{-1}(y))$.

Comme pour tout $y \in V$, on a $f^{-1}(y) = x \in U$, par construction de U, on a $\det \nabla f(x) = \det \nabla f(f^{-1}(y)) \neq 0$. De plus, tous les coefficients de M sont des applications continues en y car

- tous les coefficients de M sont des sommes-produits de coefficients de $\nabla f(f^{-1}(y)$
- tous les coefficients de $\nabla f(f^{-1}(y))$ sont continus par composition de fonctions continues. En effet, les dérivées partielles de f sont continues en $f^{-1}(y)$ car $f^{-1}(y) \in U \subset E$ et $f \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$, et f^{-1} est continue en y pour tout $y \in V$.

Par conséquent, tous les coefficients de la matrice $\frac{1}{\det \nabla f(f^{-1}(y))} M$ sont des fonctions continues en y pour tout $y \in V$, et donc tous les coefficients de $\nabla f^{-1}(y)$, qui sont toutes les dérivées partielles d'ordre 1 de f^{-1}, sont continues en y pour tout $y \in V$. Et donc $f^{-1} \in C^1(V, U)$.