

Attention : il y a une patafe en introduction de cette série en guise d'échauffement:)

Le but de cette série est de procéder à la preuve du théorème d'inversion locale. La définition qui suit, de même que l'énoncé et le résultat du théorème sont à connaître, de même que les rappels qui sont en préambule. Sa démonstration n'est pas à connaître et est séparée dans les 8 exercices ci-dessous, qui sont tous **facultatifs**.

On rappelle tout d'abord la définition d'un **difféomorphisme local** de classe C^1 .

Définition :

Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction (vectorielle) et $x_0 \in E$. On dit que f est un difféomorphisme local en x_0 de classe C^1 si

- a) Il existe un ouvert U , tel que $x_0 \in U$, et un ouvert $V \subset \text{Im} f \subset \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) \in V$ tels que $f : U \rightarrow V$ est inversible (autrement dit f est une bijection de U vers V)
- b) $f \in C^1(U, V)$
- c) $f^{-1} \in C^1(V, U)$

Le Théorème d'inversion locale s'énonce alors comme

Théorème d'inversion locale

Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $f \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$ et $x_0 \in E$. Si $\det(\nabla f(x_0)) \neq 0$, alors f est un difféomorphisme local de classe C^1 en x_0 : c'est-à-dire qu'il existe des ouverts $U \ni x_0$, $V \ni f(x_0)$ tels que $f : U \rightarrow V$ inversible, $f \in C^1(U, V)$ et $f^{-1} \in C^1(V, U)$. De plus, pour tout $y \in V$, on a

$$\nabla f^{-1}(y) = \left(\nabla f(f^{-1}(y)) \right)^{-1}$$

Dans cette série, on va démontrer en plusieurs étapes ce théorème. L'idée est de tout d'abord montrer que f est inversible dans des voisinages de x_0 et $f(x_0)$, c'est-à-dire que dans ces voisinages, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution x^* . En effet, s'il existe une solution de cette équation, alors f est surjective, et si cette solution est unique, alors f est injective. On pourra alors définir la réciproque f^{-1} par $f^{-1}(y) = x^*$. Puis on montre que cette réciproque est continûment différentiable. Cela se fait en trois étapes qui sont les suivantes :

Etape 1 On montre qu'il existe $r, \tilde{r} > 0$ tel que pour $\forall y \in B(f(x_0), \tilde{r})$, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution $x \in B(x_0, r)$.

Etape 2 Par la suite, en posant $V = B(f(x_0), \tilde{r})$ et $U = B(x_0, r) \cap f^{-1}(V)$, on obtient que $f : U \rightarrow V$ est une bijection et on peut définir son inverse $f^{-1} : V \rightarrow U$. De plus, on montre que $f^{-1} \in C^0(V, U)$.

Etape 3 On montre finalement que $f^{-1} \in C^1(V, U)$ et que $\nabla f^{-1}(y) = \left(\nabla f(f^{-1}(y)) \right)^{-1}$ pour tout $y \in V$

Observer au passage, que dans cette étape, on ne montre pas que $f \in C^1(U, V)$ (comme nécessaire dans la définition d'un difféomorphisme) car c'est immédiatement garanti par l'hypothèse que $f \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$. On doit donc juste montrer que la réciproque est aussi C^1 .

Avant de se lancer dans la preuve, voici quelques rappels utiles, vus dans différentes séries :

Rappel 1 : norme d'une matrice (voir série 1-A)

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, on note $\|A\|_F$ sa norme de Frobenius définie par

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n A_{ij}^2}$$

qui satisfait en particulier que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|Ax\| \leq \|A\|_F \|x\|$$

où $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne du vecteur.

Rappel 2 : fonction Lipschitz (voir série 4-A)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que f est Lipschitz de constante $L \geq 0$ si pour tout $x, y \in E$, on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Une fonction Lipschitz est toujours continue. Si $L < 1$, on dit que f est strictement contractante sur E .

Rappel 3 : point fixe de Banach (voir série 4-A pour la version dans \mathbb{R}^n)

Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec $K \subset \mathbb{R}^n$ un fermé, une fonction telle que

- $f(K) \subset K$
- f est strictement contractante sur K

Alors il existe un unique $x^* \in K$ tel que $f(x^*) = x^*$ (on dit que x^* est un point fixe).

Rappel 4 : inégalité du triangle pour l'intégrale d'une fonction vectorielle (voir série 6-A)

Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$. Alors

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

Rappel 5 : caractérisation de la continuité

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Alors si $F \subset \text{Im} f$ est un ouvert, sa pré-image $f^{-1}(F)$ est un ouvert. (Ceci est une conséquence directe de la définition $\varepsilon - \delta$.)

Pour tout ce qui suit (fin de la patate), on travaille sous les hypothèse du théorème d'inversion local, c'est-à-dire $f \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$ et $\det(\nabla f(x_0)) \neq 0$, c'est-à-dire que la matrice jacobienne $\nabla f(x_0)$ est inversible. On notera $(\nabla f(x_0))^{-1}$ la matrice inverse et les produits matrice-vecteur par le point médian \cdot .

Le but des 4 premiers exercices est de montrer l'étape 1 de la preuve, c'est-à-dire qu'il existe des voisinages de x_0 et $f(x_0)$ pour lesquels l'équation $f(x) = y$ à une unique solution x dans le voisinage de x_0 pour tout y dans le voisinage de $f(x_0)$.

Exercice 1. Etape 1 - partie 1

Soit $y \in \mathbb{R}^n$ fixé. On définit la fonction $\varphi^y : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\varphi^y(x) = x - (\nabla f(x_0))^{-1} \cdot (f(x) - y).$$

Montrer que

$$x \text{ est une solution de } f(x) = y \iff \varphi^y(x) = x.$$

Exercice 2. Etape 1 - partie 2

Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in \overline{B}(x_0, r)$, on a

- $x \in E$
- chaque composante de la matrice $D = I - (\nabla f(x_0))^{-1} \nabla f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{-1}{2n}, \frac{1}{2n} \right]$, où on a noté I la matrice identité dans \mathbb{R}^n , (N.B. le n de l'intervalle est le n de \mathbb{R}^n et est une grandeur fixe)
- $\det \nabla f(x) \neq 0$

Exercice 3. Etape 1 - partie 3

Soient le $r > 0$ obtenu dans l'exercice précédent et $y \in \mathbb{R}^n$ fixé. Montrer que pour tout $x_1, x_2 \in \overline{B}(x_0, r)$, l'application φ^y satisfait

$$\|\varphi^y(x_1) - \varphi^y(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|.$$

Indication : observer que $\varphi^y \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$ utiliser le théorème des accroissements finis sous forme intégrale.

Exercice 4. Etape 1 - partie 4

Soit le $r > 0$ des exercices précédents, posons $\tilde{r} = \frac{r}{2\|(\nabla f(x_0))^{-1}\|_F}$. Pour $y \in B(f(x_0), \tilde{r})$, considérons l'application $\varphi^y : \overline{B}(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$, où φ^y est définie comme dans l'exercice 1. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer que $\varphi^y(\overline{B}(x_0, r)) \subset B(x_0, r)$ et en déduire que pour $y \in B(f(x_0), \tilde{r})$, il existe un unique $x^* \in B(x_0, r)$ solution de l'équation $f(x^*) = y$.

Les prochains exercices permettent de montrer l'étape 2 de la preuve, c'est-à-dire qu'il existe deux ouverts $U, V \in \mathbb{R}^n$ tel que $f : U \rightarrow V$ est inversible, c'est-à-dire qu'on peut définir sa réciproque $f^{-1} : V \rightarrow U$. De plus, on montre que f^{-1} est continue.

Exercice 5. Etape 2 - partie 1

Soient $r > 0$ et $\tilde{r} > 0$ donné dans les exercices ci-dessus. Soit $V = B(f(x_0), \tilde{r})$ et $U = B(x_0, r) \cap f^{-1}(V) = \{x \in B(x_0, r) \mid f(x) \in B(f(x_0), \tilde{r})\}$. Montrer que U, V sont des ouverts et que $f : U \rightarrow V$ est inversible, c'est-à-dire que f est injective sur U et surjective dans V .

Exercice 6. Etape 2 - partie 2

Pour U, V comme dans l'exercice précédent, on définit $f^{-1} : V \rightarrow U$ la réciproque de f . Montrer que $f^{-1} : V \rightarrow U$ est Lipschitz, et donc continue.

Indication : pour $y_1, y_2 \in V$, poser $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$ et utiliser que par construction de f^{-1} , ils satisfont les équations $\varphi^{y_1}(x_1) = x_1$ et $\varphi^{y_2}(x_2) = x_2$.

Finalement, le dernier exercice permet de montrer l'étape 3 de la preuve, à savoir que $f^{-1} \in C^1(U, V)$ et que $\nabla f^{-1}(y) = \left(\nabla f(f^{-1}(y)) \right)^{-1}$ pour tout $y \in V$

Exercice 7. Etape 3 - partie 1

Montrer que $f^{-1} : V \rightarrow U$ est différentiable pour tout $y \in V$ et que sa jacobienne est donnée par

$$\nabla f^{-1}(y) = \left(\nabla f(f^{-1}(y)) \right)^{-1}.$$

Indication : utiliser que pour tout $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable sur l'ouvert E , on a pour tout $x, z \in E$

$$f(z) = f(x) + \nabla f(x) \cdot (z - x) + r_f(z), \text{ avec } r_f : E \rightarrow \mathbb{R}^n, \lim_{z \rightarrow x} \frac{\|r_f(z)\|}{\|z - x\|} = 0.$$

Exercice 8. Etape 3 - partie 2

Montrer que toutes les dérivées partielles de f^{-1} sont continues dans V , autrement dit f^{-1} est continûment différentiable dans V .