Quelques réflexions sur la notion de continûment différentiable

1 Rappel

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in D_f$. On dit que f est continûment différentiable en $x_0 \in \Omega$ si

1. pour tout $i = 1, ..., n$, la dérivées partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe dans un voisinage de x_0.
2. pour tout $i = 1, ...n$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est continue en x_0.

On a vu au cours que si f est continûment différentiable, alors f est différentiable.

La notion de continûment différentiable est la bonne notion pour aller plus loin dans le calcul différentiel. En effet, on aimerait pouvoir continuer à différentier, et donc pour obtenir des dérivées partielles elles-mêmes différentiables, il est nécessaire de demander qu'elles soient continues.

Cependant, et de manière très surprenante, on peut montrer qu'il suffit que les n dérivées partielles existent en x_0 et que seulement $n-1$ dérivées partielles soient continues en x_0 pour obtenir la différentiabilité de f (**attention : c'est une notion plus faible que continûment différentiable**).

On va vérifier ce fait dans le cas $n = 2$.

2 Preuve de la remarque surprenante pour $n = 2$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

1. f est définie dans un voisinage de $(x_0, y_0) \in D_f$
2. $\nabla f(x_0, y_0)$ existe
3. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe dans un voisinage de (x_0, y_0) et est continue en (x_0, y_0).

Alors f est différentiable en (x_0, y_0).

Calculons

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0)\rangle}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}.$$

Si cette limite vaut 0, alors f est différentiable.

Exprimons différemment le numérateur en appliquant une feinte du loup, puis le TAF dans la variable x.

$$f(x, y)-f(x_0, y_0)-\langle \nabla f(x_0, y_0), (x-x_0, y-y_0)\rangle = f(x, y) \underbrace{-f(x_0, y) + f(x_0, y)}_{feinte\,du\,loup} -f(x_0, y_0)-\langle \nabla f(x_0, y_0), (x-x_0, y-y_0)\rangle$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f(x_0 + \theta(x - x_0), y)}{\partial x}(x - x_0) - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0)}_{=A(x)} + \underbrace{f(x_0, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)}_{=B(x)}, \theta \in]0, 1[$$

Observons de plus qu'on a, par la croissance de la fonction racine

$$|x - x_0|, |y - y_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

On obtient alors la majoration

$$\frac{|f(x, y) - f(x_0, y_0) - \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0)\rangle|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \leq \frac{|A(x)|}{|x - x_0|} + \frac{|B(x)|}{|y - y_0|}.$$

Si on montre que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|A(x)|}{|x-x_0|} = 0 \text{ et } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|B(x)|}{|y-y_0|} = 0$$

alors on a le résultat voulu. Traitons donc ces deux limites :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|A(x)|}{|x-x_0|} \leq \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left| \frac{\partial f(x_0+\theta(x-x_0),y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \right| = 0 \text{ par la continuité de } \frac{\partial f}{\partial x}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|B(x)|}{|y-y_0|} &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left| \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)}{y-y_0} \right| \\ &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left| \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \right| = 0 \end{aligned}$$

puisque la dérivée partielle par rapport à y au point (x_0, y_0) existe.

3 Autres faits surprenants

En dimension 1, la notion de fonctions continûment différentiables en un point x_0 du domaine de définition de f est plus forte qu'en dimension n quelconque. En effet, comme une fonction dérivable en un point implique qu'elle est continue en ce point, on a le résultat suivant :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in D_f$ telle que sa fonction dérivée f' est définie au voisinage de $x_0 \in D_f \cap D_{f'}$. Si f est continûment dérivable en x_0, i.e, $\lim_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$, alors f est continue en x_0 mais aussi sur tout un voisinage de x_0.

Le raisonnement de la preuve est le suivant : on utilise "simplement" le fait qu'une fonction continûment dérivable en x_0 doit avoir sa dérivée définie dans un voisinage de x_0 (pour pouvoir prendre la limite de la dérivée). Dès lors pour tout x de ce voisinage, le nombre dérivé $f'(x)$ existe et (c'est un cas très particulier de la dimension 1) par conséquent la fonction f est continue en x.

Ce résultat ne se généralise pas aux dimensions supérieures : pour pouvoir être continûment différentiable, il faut et il suffit que les dérivées partielles existent dans un voisinage du point x_0 et que ces dernières soient continues en x_0 (la même définition qu'en dimension une). MAIS l'existence des dérivées partielles (donc de ∇f) dans les x au voisinage de x_0 ne garantit pas que f est continue en ce point x (on a la continuité en x_0 mais pas dans son voisinage).