

Série 28

Exercice 1. Dans le cours, les vecteurs ont été définis dans \mathbb{R}^n , mais nous les avons représentés dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 (c'est-à-dire pour $n = 2$ ou $n = 3$). Comment se réalisent les vecteurs dans \mathbb{R} (c'est-à-dire pour $n = 1$) ? Définis cette notion et explique comment on caractérise un vecteur sur la droite réelle \mathbb{R} .

Exercice 2. On considère dans le plan \mathbb{R}^2 l'origine $O = (0; 0)$ et les points $A = (1; 1)$ et $B = (2; 1)$.

- a) Reporte sur du papier quadrillé les vecteurs \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} et \overrightarrow{BA} .
- b) Construis ensuite les vecteurs $2 \cdot \overrightarrow{OA} - 4 \cdot \overrightarrow{OB}$ et $2 \cdot \overrightarrow{OA} - 4 \cdot \overrightarrow{BA}$, puis la somme de ces deux vecteurs.
- c) Indique en notation colonne les composantes des vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} , puis calcule les autres vecteurs que tu as construits ci-dessus.

Exercice 3. Donne des exemples de :

- a) flèches différentes qui représentent le même vecteur ;
- b) flèches qui représentent des vecteurs différents de même direction et de même longueur ;
- c) des vecteurs de même longueur mais de directions différentes ;
- d) vecteurs différents de même direction et de même sens.

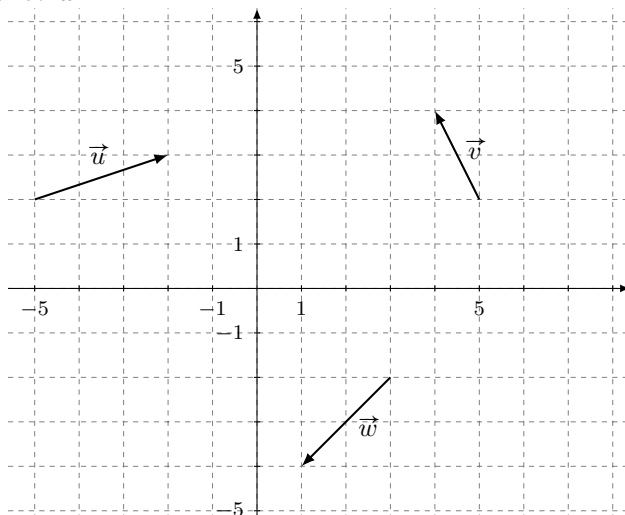
Exercice 4. En utilisant la relation de Chasles, démontre que la somme de vecteurs est commutative : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Exercice 5. Vrai ou faux ? Justifie tes réponses !

- a) Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si chacun d'eux est multiple de l'autre.
- b) Des vecteurs \vec{a} et \vec{b} sont linéairement dépendants si et seulement si $\vec{b} = \vec{0}$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$.
- c) Trois vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si deux d'entre eux sont colinéaires.
- d) Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont linéairement dépendants si l'un d'entre eux est nul.
- e) Trois vecteurs de V_3 sont linéairement dépendants si et seulement si l'un d'entre eux se trouve dans un même plan que les deux autres.
- f) Il existe deux vecteurs linéairement indépendants dans V_1 .
- g) Il existe trois vecteurs linéairement indépendants dans V_2 .
- h) Il existe trois vecteurs linéairement indépendants dans V_3 .

Exercice 6. Considérons dans V_2 les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} :

- a) Construis $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
- b) Calcule cette somme en notation colonne.
- c) Décris toutes les flèches équipollentes à \vec{u} .
- d) Détermine si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont linéairement indépendants.
- e) Détermine si les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont linéairement indépendants.

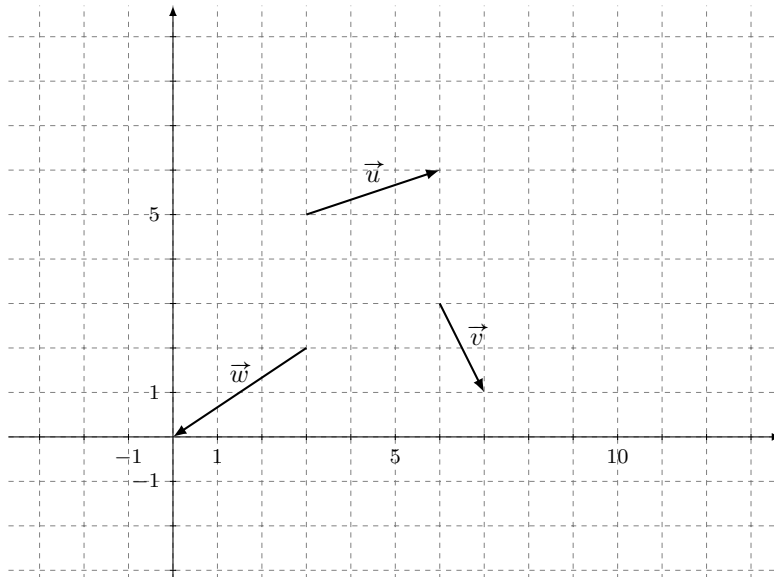


Exercice 7. En utilisant la définition de l'action de \mathbb{R} sur V_2 (et sans utiliser la notation des vecteurs en colonne), démontre dans le cas où \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires et $\lambda > 0$ que l'action de \mathbb{R} est distributive par rapport à la somme de vecteurs de V_2 : $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$. Tu pourras t'aider du Théorème de Thalès.

Exercice 8. Reporte dans \mathbb{R}^2 les points $A = (4; 2)$, $B = (0; 8)$, $C = (-6; 4)$ (dessine l'axe Ox allant de -7 à 7 , et l'axe Oy allant de -3 à 9 avec une unité valant 5 mm).

Construis le point D tel que $\vec{CD} = -\vec{AB}$. Construis ensuite $\vec{OA} + 1/2 \cdot \vec{AB}$ et $\vec{OA} + 1/2 \cdot \vec{AB} + 1/2 \cdot \vec{BC}$. Détermine le centre du carré $ABCD$.

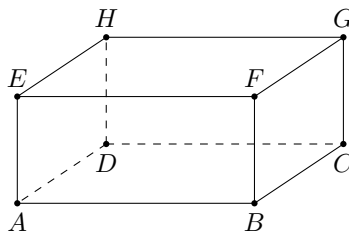
Exercice 9. On considère les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ci-dessous. Construis $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $\vec{u} - \vec{w}$ et $2\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$; ces trois vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?



Exercice 10. Barycentre d'un triangle équilatéral. On considère dans \mathbb{R}^3 le triangle dont les sommets sont les points $A = (4; 0; 0)$, $B = (0; 4; 0)$ et $C = (0; 0; 4)$. On appelle O l'origine.

- Dessine une esquisse de ce triangle dans l'espace.
- Calcule les vecteurs \vec{AB} et \vec{BC} .
- Calcule le point milieu du segment $[AB]$ obtenu vectoriellement comme $\vec{OM} = \vec{OA} + 1/2 \cdot \vec{AB}$.
- Calcule le vecteur \vec{CM} .
- Calcule et construis sur ton esquisse le barycentre G du triangle ΔABC . On l'obtient vectoriellement comme $\vec{OG} = \vec{OC} + 2/3 \cdot \vec{CM}$. Quelles sont les coordonnées de G ?

Exercice 11. On considère dans \mathbb{R}^3 un parallélépipède :



Exprime de la manière la plus simple possible les vecteurs $\vec{AB} + \vec{DC}$, $\vec{AB} + \vec{CG}$, $\vec{BA} + \vec{FC}$ ainsi que $\vec{AD} + \vec{BF} + \vec{HE} + \vec{GC}$.

Exercice 12. L'hexagone régulier. On considère dans le plan \mathbb{R}^2 les points $O = (0; 0)$ et $A = (2; 0)$.

- a) Donne l'expression des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de longueur 2 qui sont supportés par des droites faisant un angle de $\pi/3$ avec l'axe Ox . On choisira \vec{u} de sorte que ses deux composantes soient positives, et \vec{v} avec sa deuxième composante positive.
- b) Calcule les coordonnées de quatre points B, C, D et E tels que $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{u}$, $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{v}$, $\vec{OD} = \vec{OC} - \vec{OA}$ et $\vec{OE} = \vec{OD} - \vec{u}$.
- c) Représente sur un dessin l'hexagone régulier $OABCDE$ ainsi obtenu.

Exercice 13. On dit que deux flèches du plan sont équivalentes et on note $\vec{AB} \simeq \vec{CD}$ si elles ont même direction et même longueur.

- a) Montre que cela définit une relation d'équivalence sur les flèches.
- b) Peut-on définir une somme sur les classes d'équivalence de flèches ainsi obtenues (comme nous l'avons fait pour les classes d'équipollence) ?

Exercice 14. Les polynômes comme espace vectoriel. Considérons $\mathbb{R}[x]$, l'anneau des polynômes réels en une variable x .

- a) Pourquoi $\mathbb{R}[x]$ est-il un groupe commutatif pour l'addition de polynômes ?
- b) On définit une action de \mathbb{R} sur $\mathbb{R}[x]$ en posant $\lambda \cdot (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \dots + \lambda a_nx^n$. Pourquoi $\mathbb{R}[x]$ est-il un \mathbb{R} -espace vectoriel ? Explique en particulier pourquoi ce produit est distributif par rapport à l'addition.
- c) Montre que les polynômes $1, x, x^2$ sont linéairement indépendants.
- d) Montre que les polynômes $1 - x, 1 + x, x$ sont linéairement dépendants.