Quelques exemples d'entrainement pour la recherche d'extrema globaux sur un compacte de $\mathbb{R}^2$

1 Méthodologie

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et une fonction $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $f \in C^0(\overline{\Omega})$. On recherche ses extrema globaux (qui existent puisque f est continue sur un compacte) comme suit :

1. Etape 1 : recherche des extrema locaux parmi les points ci-dessous

Catégorie a : les points stationnaires de f dans Ω, pour lesquels on applique le critère de la Hessienne.

Catégorie b : les points dans Ω où f n'est pas différentiable

Catégorie c : les points appartenant au bord $\partial\Omega$.

2. Etape 2 : on trie ces points pour ne conserver que les extrema globaux.

Remarque : pour les point du bord $\partial\Omega$, on se restreindra à deux cas :

- le bord $\partial\Omega$ est un ensemble de niveau de f. Il est alors possible de comparer les valeurs de f sur le bord aux valeurs à l'intérieur
- le bord $\partial\Omega$ n'est pas un ensemble de niveau. On le paramétrise alors par une courbe $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $[a, b]$, (ou plusieurs courbes si Ω est un poylgone) et on appliquera le résultat suivant :

  soit $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ et $t_0 \in [a, b]$ tel que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$. Si (x_0, y_0) est un point à extremum local de f dans $\overline{\Omega}$, alors t_0 est un point à extremum local de $f \circ \gamma$ dans $[a, b]$. Autrement dit, une condition nécessaire pour qu'un point du bord soit un extremum local de f dans $\overline{\Omega}$, c'est qu'il soit un extremum local de f restreinte à $\partial\Omega$ (la réciproque n'est pas vraie en général).

  Par conséquent, on pourra chercher des candidats parmi les points $\gamma(t) \in \partial\Omega$ tels que $t = a$ ou $t = b$ ou $t \in]a, b[$ avec $[f \circ \gamma]'(t) = 0$.

2 Un premier exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - x - y$. Cherchons les extrema globaux de f sur le triangle fermé T de sommets $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ donné par

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 - x\right\}.$$

Comme f est continue sur T (qui est fermé et borné), ses extrema globaux existent.

1. Etape 1 : on cherche les extrema locaux (ou des candidats aux extrema locaux) dans les trois catégories a,b et c. La fonction étant un polynôme, elle est en tout cas différentiable, donc il n'existe pas de points dans la catégorie b. Comme de plus elle est $C^2(\mathring{T})$, on pourra éventuellement trouver des points de la catégorie a.

   - Points stationnaire à l'intérieur de T : on calcule $\nabla f(x, y)$ puis on résout $\nabla f(x, y) = (0, 0)$.

   $$\nabla f(x, y) = (4x - 1, 4y - 1) = (0, 0) \iff x = y = \frac{1}{4}.$$

   Le point $(1/4, 1/4) \in \mathring{T}$ et est stationnaire. On applique le critère de la Hessienne. On a

   $$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$H_f(1/4,1/4) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det H_f(1/4,1/4) = 16 > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1/4,1/4) = 4 > 0.$$

Par conséquent, $(1/4, 1/4)$ est un point à minimum local. On calcule $f(1/4,1/4) = \frac{-1}{8}$.

- Pour les points de ∂T, on paramétrise les trois arêtes de T par des fonctions $\gamma_i, i = 1, 2, 3$, et on cherche des candidats comme points extrema parmi les points à tangente horizontale de $f \circ \gamma_i$ ou dans les trois sommets de T.

  On paramétrise le segment $(0,0) \to (1,0)$ par $\gamma_1(t) = (0,t), t \in [0,1]$. On a

  $$f(\gamma_1(t)) = 2t^2 - t, \quad [f(\gamma_1)]'(t) = 4t - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{4}.$$

  On paramétrise le segment $(0,1) \to (0,1)$ par $\gamma_2(t) = (t, 1-t), t \in [0,1]$. On a

  $$f(\gamma_2(t)) = 4t^2 - 4t + 1, \quad [f(\gamma_2)]'(t) = 8t - 4 = 0 \iff t = \frac{1}{2}.$$

  On paramétrise le segment $(0,0) \to (0,1)$ par $\gamma_3(t) = (0,t), t \in [0,1]$. On a

  $$f(\gamma_3(t)) = 2t^2 - t, \quad [f(\gamma_3)]'(t) = 4t - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{4}.$$

  On calcule :

  $$\begin{aligned} \gamma_1(1/4) &= (1/4, 0), f(\gamma_1(1/4)) = -\frac{1}{4} \\ \gamma_2(1/2) &= (1/2, 1/2), f(\gamma_2(1/2)) = 0 \\ \gamma_3(1/4) &= (0, 1/4), f(\gamma_3(1/4)) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

  De plus, on considère aussi les trois sommets

  $$f(0,0) = 0, f(1,0) = 1, f(0,1) = 1.$$

  Attention : ces 6 points ne sont pas forcément des extrema de f même s'ils peuvent être des extrema de $f \circ \gamma_i$. Ce ne sont que des candidats.

2. Etape 2 : on trie les 7 points

   $$(1/4, 1/4), (1/4, 0), (1/2, 1/2), (0, 1/4), (0, 0), (0, 1), (0, 1)$$

   en fonction de leur image par f. On observe que $(1/4, 1/4)$ donne le minimum global ($f(1/4, 1/4) = -1/8$) et $(1, 0), (0, 1)$ donnent le maximum global ($f(1, 0) = f(0, 1) = 1$).

3 Un second exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$. Cherchons les extrema globaux dans le disque fermé

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 9\right\}.$$

La fonction étant continue sur D qui est fermé et borné, elle admet donc un minimum global et un maximum global.

1. On cherche les extrema locaux ou des candidats possibles dans les catégories a,b et c. On calcule pour commencer
$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$
On observe que $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$. Il n'y a donc pas de points de catégorie a.

   Le point $(0,0)$ est un point où f n'est pas différentiable (le gradient n'y existe pas). On peut le vérifier en observant que
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \pm 1 \text{ et } \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \pm 1.$$
On garde donc ce point comme point de catégorie b.

   Pour les points de catégorie c, on observe que ∂D est le cercle de rayon 3 et une courbe de niveau de f. Par conséquent, tous les points $(x,y) \in \partial D$ sont tels que $f(x,y) = -3$.

2. On a donc comme points candidats les points de ∂D et le point $(0,0)$. Le point $(0,0)$ est un point à maximum global, puisque $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) \leq 0$ pour tout (x,y). De plus les points du bords sont tous des points à minimaux locaux pour lesquelles f prend la valeur -3.