

# Quelques réflexions autour du théorème de Schwarz

## 1 Définition

Soient  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , définie sur un voisinage de  $x_0 \in D_f$ . On dit que  $f$  est deux fois différentiable en  $x_0$  si

1. pour tout  $i, j = 1, \dots, n$ , la dérivée partielle seconde  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  existe dans un voisinage de  $x_0$  (en particulier pour tout  $i = 1, \dots, n$ , la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  existe dans un voisinage de  $x_0$ ).
2. pour tout  $i, j = 1, \dots, n$ , la dérivée partielle seconde  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  est continue en  $x_0$ .

**Remarque :** on peut se convaincre que cette définition est la bonne (c'est-à-dire la bonne notion qui fait suite à une fonction une fois continûment différentiable en  $x_0$ ) en observant que si  $f$  est deux fois continûment différentiable en  $x_0$ , alors en particulier les dérivées premières sont continûment différentiables en  $x_0$  (puisque que les dérivées partielles de chaque dérivées partielle sont continues en  $x_0$ ), donc les dérivées premières sont différentiables en  $x_0$ , donc continues et donc  $f$  est continûment différentiable en  $x_0$ .

## 2 Théorème de Schwarz

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , définie sur un voisinage de  $x_0 \in D_f$ . Soient  $i, j, i \neq j$ , deux indices fixés dans  $\{1, \dots, n\}$ . Supposons que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  existent dans le voisinage de  $x_0$  et sont continues en  $x_0$ . Alors on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0).$$

Deux faits sont à noter :

1. Si  $f$  est deux fois continûment différentiable en  $x_0$ , en particulier le théorème de Schwarz s'applique.
2. Le résultat n'est en général pas vrai si on retire la continuité des dérivées croisées.
3. La réciproque est en général fausse :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \not\Rightarrow \text{que les dérivées croisées sont continues en } x_0.$$

Il n'est donc pas possible de vérifier l'égalité des dérivées croisées pour établir que  $f$  est deux fois continûment différentiables en  $x_0$ .

## 3 Fait 1 : contre-exemple de Peano

Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Cet exemple (célèbre) a été donné par Peano en 1884. C'est un exemple de fonction pour laquelle le résultat du théorème n'est pas vérifié.

Voici quelques calculs pour s'en convaincre :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, (x, y) \neq (0, 0).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y^4 x - 4y^2 x^3 + x^5}{(x^2 + y^2)^2}, (x,y) \neq (0,0).$$

Dès lors, on a

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^5}{y^5} = -1$$

alors que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{x^5} = 1$$

Le résultat du théorème de Schwarz étant une condition nécessaire à ce que les dérivées croisées soient continues (et donc nécessaire pour que  $f$  soit  $C^2$ ), on obtient immédiatement qu'elles ne le sont pas. On peut cependant explicitement le vérifier aussi pour l'observer :

Calculons par exemple pour  $(x,y) \neq (0,0)$  :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x,y) = \frac{x^6 + 9x^4 y^2 - 9x^2 y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}.$$

En coordonnée polaire, on a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) &= \frac{r^6 (\cos^6(\theta) + 9 \cos^4(\theta) \sin^2(\theta) - 9 \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) - \sin^6(\theta))}{r^6} \\ &= \cos^6(\theta) + 9 \cos^4(\theta) \sin^2(\theta) - 9 \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) - \sin^6(\theta). \end{aligned}$$

On observe que la fonction vaut 1 pour  $\theta = 0$  et  $-1$  pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Elle n'est donc pas continue.

## 4 Fait 2 : contre-exemple pour la réciproque

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^2 \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Vérifions que les dérivées secondes croisées en  $(0,0)$  sont égales, mais que les dérivées croisées ne sont pas continues en  $(0,0)$  (et donc que la fonction n'est pas deux fois continûment différentiable en  $(0,0)$ ).

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), (x,y) \neq (0,0).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), (x,y) \neq (0,0).$$

On vérifie que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = 0$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 0$$

pourtant la fonction n'est même pas continûment différentiable en  $(0,0)$  (donc en tout cas les dérivées croisées ne sont pas continues et  $f$  n'a aucune chance d'être deux fois continûment différentiable). En effet, en passant en coordonnées polaires, on vérifie que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \text{ n'existe pas.}$$

En effet, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = r^2 \sin^2(\theta) \sin\left(\frac{1}{r^2}\right) - 2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \cos\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

La limite du premier terme vaut 0 mais le second terme n'a pas de limite quand  $r \rightarrow 0^+$ .

## 5 Fait 2 : un autre contre-exemple pour la réciproque

On peut construire un exemple (parmi d'autres) encore plus fin. Au vue de l'exemple précédent, on serait en droit de se demander la seule chose suivante : et si la fonction était  $C^1$ , est-ce que l'égalité des dérivées secondes croisées suffiraient pour aller à  $C^2$ ? La réponse est non comme le montre l'exemple suivant.

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

On vérifie comme précédemment que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), (x,y) \neq (0,0).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), (x,y) \neq (0,0).$$

On vérifie que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = 0$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 0$$

En passant en coordonnées polaires, on peut vérifier que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues en  $(0,0)$ . Pourtant si on calcule, par exemple, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x,y) &= 4xy \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \\ &\quad - \frac{4x^5y + 4x^3y^3 - 8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{4x^3y^3}{(x^2+y^2)^4} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \end{aligned}$$

On observe que le terme

$$\frac{-4x^3y^3}{(x^2+y^2)^4} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

ou le terme

$$-\frac{4x^5y + 4x^3y^3 - 8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

n'ont pas de limites, en coordonnées polaires, quand  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ .

La fonction  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x,y)$  n'est donc pas continue en  $(0,0)$ .

## 6 Anecdotes

1. Le Schwarz de Cauchy-Schwarz et le même Schwarz que celui de la règle de Schwarz !
2. (Hors cours) Il existe une version "plus faible" du théorème qui requière uniquement que  $f$  soit deux continûment différentiable en  $x_0$ .