

Quelques exemples de développements de Taylor à l'ordre 2

1 Rappel

Pour $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\Omega)$ avec Ω un ouvert, on note $p_{2,f,x_0}(x)$, pour $x \in \mathbb{R}^n$, son polynôme de Taylor à l'ordre 2. Ce dernier satisfait que pour tout x, x_0 , tels que $[x_0, x] \subset \Omega$

$$f(x) = p_{2,f,x_0}(x) + r(x), \quad r(x) = o(\|x - x_0\|^2).$$

De plus, il est donné par la formule

$$p_{2,f,x_0}(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x_0) \cdot (x - x_0), x - x_0 \rangle$$

Pour obtenir le polynôme, on peut soit calculer $\nabla f(x_0)$ et $H_f(x_0)$, soit procéder par composition.

2 Rappel sur les petits o

Dans \mathbb{R} , on dit $r(z) = o(|z - z_0|^p)$ au voisinage de z_0 si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{r(z)}{|z - z_0|^p} = 0.$$

En particulier, il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie dans un voisinage de z_0 et continue en z_0 telle que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon(z) = \varepsilon(z_0) = 0$$

et telle que

$$r(z) = |z - z_0|^p \varepsilon(z).$$

Cette notion se généralise dans \mathbb{R}^n et on dira que

$$r(x) = o(\|x - x_0\|^p), \text{ pour } x, x_0 \in \mathbb{R}^n$$

si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{\|x - x_0\|^p} = 0.$$

En particulier, il existe $\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, définie dans un voisinage de x_0 et continue en x_0 telle que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = \varepsilon(x_0) = 0$$

et

$$r(x) = \|x - x_0\|^p \varepsilon(x).$$

3 Une inégalité utile pour estimer les petits o

Une inégalité utile est un cas particulier de l'inégalité de Young, que nous avons vu dans la série 2A : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

4 Exemple de calcul 1

Soient $f(x, y) = e^{x^2+y^2+xy}$ et $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Cherchons $p_{2,f,(x_0,y_0)}(x, y)$.

On a pour $z \rightarrow 0$,

$$e^z = 1 + z + r(z), \text{ où } r(z) = z\varepsilon(z), \text{ avec } \lim_{z \rightarrow 0} \varepsilon(z) = 0, \text{ et } \varepsilon(0) = 0$$

En particulier $r(z)$ est continue en 0 et $r(z) = o(z)$.

$$\text{D'où } e^{x^2+y^2+xy} = 1 + x^2 + y^2 + xy + \underbrace{(x^2 + y^2 + xy)\varepsilon(x^2 + y^2 + xy)}_{r(x,y)}$$

Observons que $r(x, y) = o(\|(x, y)\|^2)$. En effet, on a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|r(x, y)|}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x^2 + y^2 + xy|}{x^2 + y^2} |\varepsilon(x^2 + y^2 + xy)|.$$

Par l'inégalité du triangle et de Young, on peut majorer

$$\frac{|x^2 + y^2 + xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{3}{2}.$$

Puisque ε est continue en $z = 0$, par composition de fonction continue, on a aussi que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(x^2 + y^2 + xy) = 0$$

et donc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|r(x, y)|}{x^2 + y^2} \leq \frac{3}{2} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |\varepsilon(x^2 + y^2 + xy)| = 0.$$

On a donc bien $r(x, y) = o(\|(x, y)\|^2)$ et donc

$$p_{2,f,(x_0,y_0)}(x, y) = 1 + x^2 + xy + y^2.$$

5 Exemple de calcul 2

Soit $f(x, y) = e^{x^2+y^2+x+y}$. Cherchons $p_{2,f,(0,0)}(x, y)$. Ici ce qui change c'est que les termes linéaires x et y peuvent donner des expressions quadratiques une fois élevés au carré. On va donc développer e^z plus loin.

Pour $z \rightarrow 0$, on a

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \underbrace{z^2\varepsilon(z)}_{o(z^2)}$$

On a alors

$$e^{x^2+y^2+x+y} = 1 + x^2 + y^2 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + x + y)^2 + \underbrace{(x^2 + y^2 + x + y)^2\varepsilon(x^2 + y^2 + x + y)}_{o(\|(x,y)\|^2)}.$$

En ne gardant que les fonctions quadratiques (donc les x^2, y^2, xy) et en rangeant tout le reste dans le o , on a

$$e^{x^2+y^2+x+y} = 1 + x^2 + y^2 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy + o(\|(x, y)\|^2) = 1 + x + y + \frac{3}{2}x^2 + xy + \frac{3}{2}y^2 + o(\|(x, y)\|^2).$$

D'où $p_{2,f,(0,0)}(x, y) = 1 + x + y + \frac{3}{2}x^2 + xy + \frac{3}{2}y^2$.

6 Exemple de calcul 3

Soit $f(x, y) = \sin(2 - x^2 - y^2)$. Cherchons $p_{2,f,(1,1)}(x, y)$.

On a pour $z \rightarrow 0$,

$$\sin(z) = z + r(z), r(z) = z^2\varepsilon(z) = o(z^2)$$

Notons que ce développement est un cas très particulier où le reste est $o(z^2)$ alors que le sinus est développé uniquement jusqu'à la puissance 1, mais cela est dû au fait que la dérivée seconde du sinus en zéro est nulle. Par Taylor, on a en effet

$$\sin(z) = \underbrace{\sin(0)}_{=0} + \underbrace{\cos(0)}_{=z} z - \underbrace{\frac{1}{2}\sin(0)}_{=0} z^2 - \underbrace{\frac{1}{6}\cos(\theta z)}_{o(z^2)} z^3, \theta \in]0, 1[.$$

Pour obtenir le polynôme de Taylor autour de $(1, 1)$, on récrit le polynôme $2 - x^2 - y^2$ comme

$$\begin{aligned} 2 - x^2 - y^2 &= 2 - (x - 1 + 1)^2 + (y - 1 + 1)^2 \\ &= 2 - (x - 1)^2 - 2(x - 1) - 1 + (y - 1)^2 - 2(y - 1) - 1 \\ &= -2(x - 1) - 2(y - 1) - (x - 1)^2 - (y - 1)^2 \end{aligned}$$

D'où

$$\sin(2 - x^2 - y^2) = -2(x - 1) - 2(y - 1) - (x - 1)^2 - (y - 1)^2 + \underbrace{(-2(x - 1) - 2(y - 1) - (x - 1)^2 - (y - 1)^2)^2}_{o(\|(x-1, y-1)\|^2)} \varepsilon(2 - x^2 - y^2).$$

D'où $p_{2,f,(1,1)}(x, y) = -2(x - 1) - 2(y - 1) - (x - 1)^2 - (y - 1)^2$.