Exercice 1.

a) On considère d'abord le cas $a > 0$. Soit $\varepsilon > 0$, et $\delta = \varepsilon \cdot 2\sqrt{a}$. Alors, si $x \in \mathbb{R}_+$ est tel que $0 < x - a < \delta$ (et en particulier $a < x$, donc $\sqrt{a} < \sqrt{x}$), on a

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{x - a}{2\sqrt{a}} < \frac{\delta}{2\sqrt{a}} = \frac{\varepsilon \cdot 2\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} = \varepsilon,$$

qui est bien l'inégalité voulue pour démontrer $\lim\limits_{x \to a^+} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

Pour le cas $a = 0$, on considère bien sûr $\varepsilon > 0$; mais δ choisi ci-dessus ne serait pas défini (on aurait $\delta = 0$). Dans ce cas, on peut choisir directement $\delta = \varepsilon^2$. En effet, si $x \in \mathbb{R}_+$ est tel que $0 < x - a < \delta$, on a $0 < x < \varepsilon^2$, et donc $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \sqrt{x} < \varepsilon$, comme voulu.

b) La démonstration est similaire au cas $a > 0$ ci-dessus (il faut remplacer $x - a$ par $a - x$, et on a $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \sqrt{a} - \sqrt{x}$).

c) Par **a)** et **b)**, et le fait que

$$\lim_{x \to a} g(x) = b \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} g(x) = b \ \text{ et } \ \lim_{x \to a^+} g(x) = b$$

on a pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ que $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$. La proposition du cours sur la limite d'une composition de fonctions donne alors le résultat énoncé (avec $g(x) = \sqrt{x}$ et $b = \sqrt{a}$).

d) Un des premiers exercices sur les suites demande de démontrer que si une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$ (si toutes les racines sont définies). Par la proposition sur l'équivalence de la définition d'une limite de fonction et la convergence de suites, les résultats demandés sont redémontrés.

Exercice 2. Comme $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, on a $-x \leq x \sin(1/x) \leq x$ si $x > 0$, et $x \leq x \sin(1/x) \leq -x$ si $x < 0$. Comme les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$ tendent vers 0 lorsque x tend vers 0 (par la droite ou la gauche), on conclut par le théorème des deux gendarmes que $\lim\limits_{x \to 0^+} x \sin(1/x) = 0$, et $\lim\limits_{x \to 0^-} x \sin(1/x) = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$.

Exercice 3.

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x^2 + x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x + 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{x + 1} = 1 \cdot 1 = 1.$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x \to 0} 2 \cos(x) = 2 \cdot \lim_{x \to 0} \cos(x) = 2.$

Exercice 4.

a) Le polygone peut se partager en n triangles isocèles dont les deux côté égaux mesurent 1 et l'angle au centre vaut $2\pi/n$. Par le théorème de l'aire, chacun de ces triangle a pour aire $\frac{1}{2} \sin(2\pi/n)$ et donc l'aire du polygone vaut $\dfrac{n}{2} \sin(2\pi/n)$.

b) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2} \sin(2\pi/n) = \pi \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(2\pi/n)}{2\pi/n} = \pi \cdot 1 = \pi$, qui est bien l'aire d'un disque de rayon 1.

Exercice 5.

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sin(x)}{x + \sin(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{1 - \sin(x)/x}{1 + \sin(x)/x} = 1$ (en utilisant que pour $x > 0$, on a $-1/x \leq \sin(x)/x \leq 1/x$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(x)/x = 0$ par le théorème des deux gendarmes pour les fonctions).

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sin^2(x) - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} -\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = -1.$

Exercice 6.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{\sqrt{1 - \cos(x)}} &= \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{\sqrt{1 - \cos(x)}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \cos(x)}}{\sqrt{1 + \cos(x)}} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \cos(x)}}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \cos(x)}}{|\sin(x)|} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \cos(x)}}{\frac{|\sin(x)|}{|x|}} = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 7.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x}\cdot\frac{1+\sqrt{1/x+\sqrt{1/x^3}}}{1+1/x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1/x+\sqrt{1/x^3}}}{1+1/x}}=\sqrt{1}\cdot\sqrt{1}=1.$$

Exercice 8. Pour que f admette une asymptote verticale $x=-3$, il faut que $d=3$. Pour que f admette une asymptote oblique d'équation $y=-2x+1$, nous pouvons procéder par division euclidienne *ou* avec le calcul de limites :

- Par division euclidienne : il faut que la division de ax^2+bx+c par $x+3$ ait un quotient de $q(x)=-2x+1$. On calcule (par Horner ?) $q(x)=ax+(b-3a)$ et le reste est $r(x)=c-3b+9a$. On veut $-2x+1=ax+(b-3a)$, dont on déduit $a=-2$ et $b+6=1$, soit $b=-5$.
- Par les limites : la pente de -2 de l'asymptote oblique sa calcule avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$, donc $a=-2$. De même, l'ordonnée à l'origine de 1 se calcule avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)+2x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(b+6)x+c}{x+3}=b+6$, donc $b=-5$.

Finalement, il reste à trouver c que l'on déduit du fait que le graphe de f passe par le point $(2;-2)$ et donc que $f(2)=-2$; autrement dit $\frac{4(-2)+2(-5)+c}{2+3}=-2$, ainsi $c=8$.

Exercice 9. Pour les asymptotes verticales il faut que $d=2$ et $e=-1$, ainsi on récrit $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x+2)(x-1)}$. De la forme de $f(x)$ et du fait qu'elle admet une asymptote oblique d'équation $3x-7$, on en déduit immédiatement $a=3$ et $b=-7$ (en effet, lorsque $x\to\pm\infty$, la partie rationnelle $\frac{c}{(x+d)(x+d)}$ de $f(x)$ tendra vers 0). Finalement, on utilise le fait que le graphe de f passe par le point $(-5;20)$, autrement dit que $f(-5)=20$, pour obtenir la valeur de $c=756$.