Série 27

Exercice 1. Intérêts composés. On dispose d'un capital C_0, une certaine somme d'argent, que l'on place à un taux d'intérêt i. L'intérêt acquis à la fin de période de référence (une année s'il s'agit d'un intérêt annuel, un mois s'il s'agit d'un intérêt mensuel, etc.) vaut $C_0 i$.
Si l'intérêt annuel i est de $0,04$ (autrement dit 4%), et que le capital de départ est de 500 francs, quel est l'intérêt acquis au bout d'un an ?
On décide de réinvestir l'intérêt acquis à la fin de chaque période de référence. On dispose donc de $C_1 = C_0(1+i)$ francs au début de la deuxième année. Montre que l'on dipose de $C_n = C_0(1+i)^n$ après n années. Calcule le capital dont on dispose après deux ans si $C_0 = 500$ et $i = 4\%$.

Exercice 2. Intérêts annuels ou mensuels ? Marie place 1000 francs à un taux annuel de 6%. Lucie place 1000 francs à un taux mensuel de $6\%/12 = 0,5\%$ et réinvestit chaque mois l'intérêt acquis. Nathalie place 1000 francs à un taux journalier de $6\%/365$ et réinvestit chaque jour l'intérêt acquis. Compare les capitaux dont disposent les trois amies après un an.

Exercice 3. Taux d'intérêt composé continu. Nous venons de voir qu'on peut imaginer placer un capital C_0 à un taux annuel, mensuel ou journalier et que la somme dont on dispose à la fin diffère. Qu'en serait-il si on plaçait cet argent à un taux calculé par heure, ou par minute, ou par seconde, ou mieux encore à un *taux continu* ?

a) Soit i le taux annuel de référence. On découpe l'année en k périodes égales et choisit de placer à un taux de i/k. Montre que le capital dont on dispose au bout d'un an, si on réinvestit l'intérêt acquis à la fin de chacune des k périodes, est de $C_0\left(1+\dfrac{i}{k}\right)^k$.

b) Calcule la limite de cette expression lorsque k tend vers l'infini.

c) Calcule le capital dont on dispose après n années si on le place à un taux continu.

d) Compare le capital placé à un taux continu et celui placé à un taux annuel.

Exercice 4. Soit $a > 1$. On définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en décidant de poser $f(x) = a^x$ lorsque $x \geq 0$ et $f(x) = (1/a)^x$ lorsque $x < 0$. Cette fonction est-elle paire ou impaire ?

$*$ **Exercice 5. Équations exponentielles.** Résous les équations suivantes :

a) $7^{8x^2+4} = 7^{(2-3x)^2}$;

b) $7^{2x+1} = 1$;

c) $\dfrac{16^x \cdot 125^x}{5} = \dfrac{10^4}{5^{x+1}}$;

d) $\mathrm{e}^x = -1$;

e) $2 \cdot 2^{6x-1} + 3 \cdot 2^{3x+1} + 9 = 0$;

f) $3^{x+1} + 3^{-x} = 4$;

g) $3^x + 9^x = 90$.

Exercice 6. Sans utiliser la machine, l'ordinateur, la tablette, le téléphone ou la montre, calcule :

a) $\log_7(49)$, $\log_7(1)$ et $\log_7(\sqrt{7})$;

b) $\log_3(3)$, $\log_3(\sqrt[5]{3^2})$ et $\log_3(1/81)$;

c) $\log_4(\sqrt[5]{64})$ et $\ln(\mathrm{e}^3)$.

Exercice 7. Équations logarithmiques. Résous les équations suivantes sans machine à calculer :

a) $\log_2(x) = 4$;

b) $\log_x(264) = 4$;

c) $\log_3(x) = 5$;

d) $\log_x(-1000) = 3$;

e) $\log_{27}(x) = -\dfrac{2}{3}$;

f) $\ln(x^2) = 100$.

Exercice 8. Résous l'équation $2^x = 100$. Indique la solution avec une précision de 0.0001. Fais de même avec l'équation $2^{x^2} = 100$.

Exercice 9. Résous l'équation $x - x \cdot \ln(x) = 0$.

Exercice 10. On définit $y = \dfrac{a^2 \sqrt[3]{b^2} c}{\sqrt[5]{d^4}}$. Calcule $\log_a(y)$ en fonction du logarithme en base a de b, c et d.

Exercice 11. Sans calculatrice, résous l'équation $\mathrm{Log}(x) = \mathrm{Log}(16) + 2\mathrm{Log}(3) - 2\mathrm{Log}(2) - \dfrac{1}{2}\mathrm{Log}(9)$.

Exercice 12. Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x)$.

Exercice 13. Démontre les propriétés suivantes du logarithme. Tu pourras t'aider de propriétés analogues de l'exponentielle en calculant $\exp_a$ des expressions qui nous intéressent.

a) $\log_a(1) = 0$;

b) $\log_a(a) = 1$;

c) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$;

d) $\log_a(x^m) = m \cdot \log_a(x)$;

e) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$;

f) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.

Exercice 14. Démontre la formule du changement de base pour l'exponentielle :
Soit $a > 0, a \neq 1$. On a $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} = \dfrac{\log_c(x)}{\log_c(a)}$ pour tout $c > 0, c \neq 1$ et tout $x > 0$.

Exercice 15. Équations logarithmiques (suite).

a) Résous l'équation

$$\log_2(3x - 4) + \log_2(10x - 4) = 2\log_2(5x - 2)$$

Vérifie ensuite tes solutions dans l'équation d'origine. Que s'est-il passé ?

b) Résous l'équation $\ln(2x - 3) = 4\ln(2) - \ln(3x + 10)$.

Exercice 16. Équations exponentielles (suite). Donne la solution de l'équation

$$3^{2x+1} = 2^{x-4}$$

sous la forme d'un seul logarithme avec un entier comme argument.