EPFL

Classes de complexité des problèmes : résumé

- **La classe P** est la classe des problèmes solubles en temps polynomial.
  (ex: le problème du tri d'une liste)

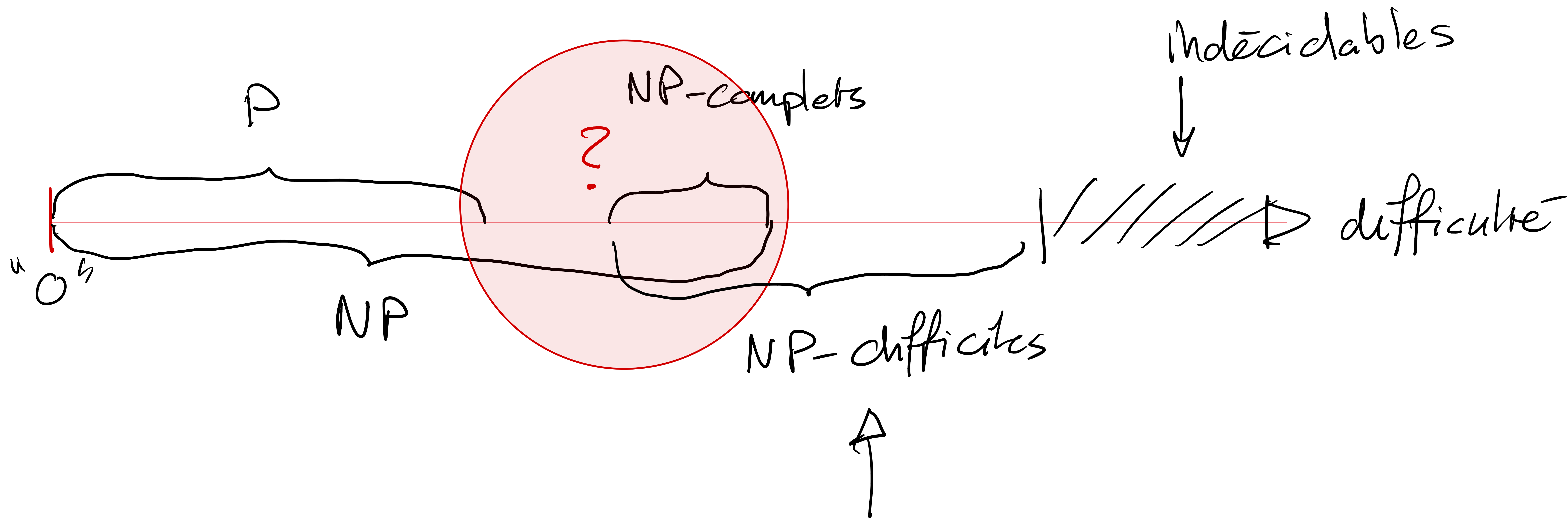
- **La classe NP** est la classe des problèmes vérifiables en temps polynomial.
  (ex: le problème de la factorisation des nombres) **Elle contient la classe P.**

- Les problèmes *les plus difficiles* de la classe NP sont dits **NP-complets.**
  (ex: le problème des sommes de sous-ensembles)

- Les problèmes *au moins aussi difficiles* que les problèmes NP-complets sont dits **NP-difficiles** (ils n'appartiennent pas forcément à la classe NP).
  (ex: la semaine prochaine !)

EPFL

Classes de complexité des problèmes : résumé



Information, Calcul et Communication

Même si beaucoup de problèmes sont NP-difficiles, tout N'est pas Perdu…

EPFL

Information, Calcul et Communication

Le problème du sac à dos

Olivier Lévêque

École polytechnique fédérale de Lausanne

Le problème du sac à dos

- n objets, chacun pesant un certain poids
- un sac à dos de capacité maximale C
- Comment remplir au mieux le sac à dos?

EPFL

Le problème du sac à dos

« Etant donné une liste L de n nombres entiers positifs et $C > 0$, trouver un sous-ensemble $S \subset \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$\sum_{i \in S} L(i) \leq C$$

et

$$\sum_{i \in S} L(i) \text{ soit maximale.»}$$

Hypothèses additionnelles:

- $L(i) \leq C$ pour toute valeur de i
- $\sum_{i=1}^{n} L(i) > C$

Le problème du sac à dos

= problème d'optimisation discrète (avec contrainte)

On ne sait pas s'il fait partie de la classe P, ni s'il fait partie de la classe NP.

Voici toutefois un algorithme polynomial en n qui remplit au moins la moitié du sac à dos :

1. Ordonner la liste L dans l'ordre décroissant
2. Chercher le nombre $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{k} L(i) \leq C \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{k+1} L(i) > C$$

Alors $\sum_{i=1}^{k} L(i) \geq C/2$:

Supposons que non : i.e. $\sum_{i=1}^{k} L(i) < \frac{C}{2}$ Faux!

Donc $\sum_{i=1}^{k+1} L(i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} L(i)}_{< C/2} + \underbrace{L(k+1)}_{\leq L(k) \leq \sum_{i=1}^{k} L(i) < \frac{C}{2}} < C$ ↯

EPFL

Information, Calcul et Communication

Le problème du voyageur de commerce

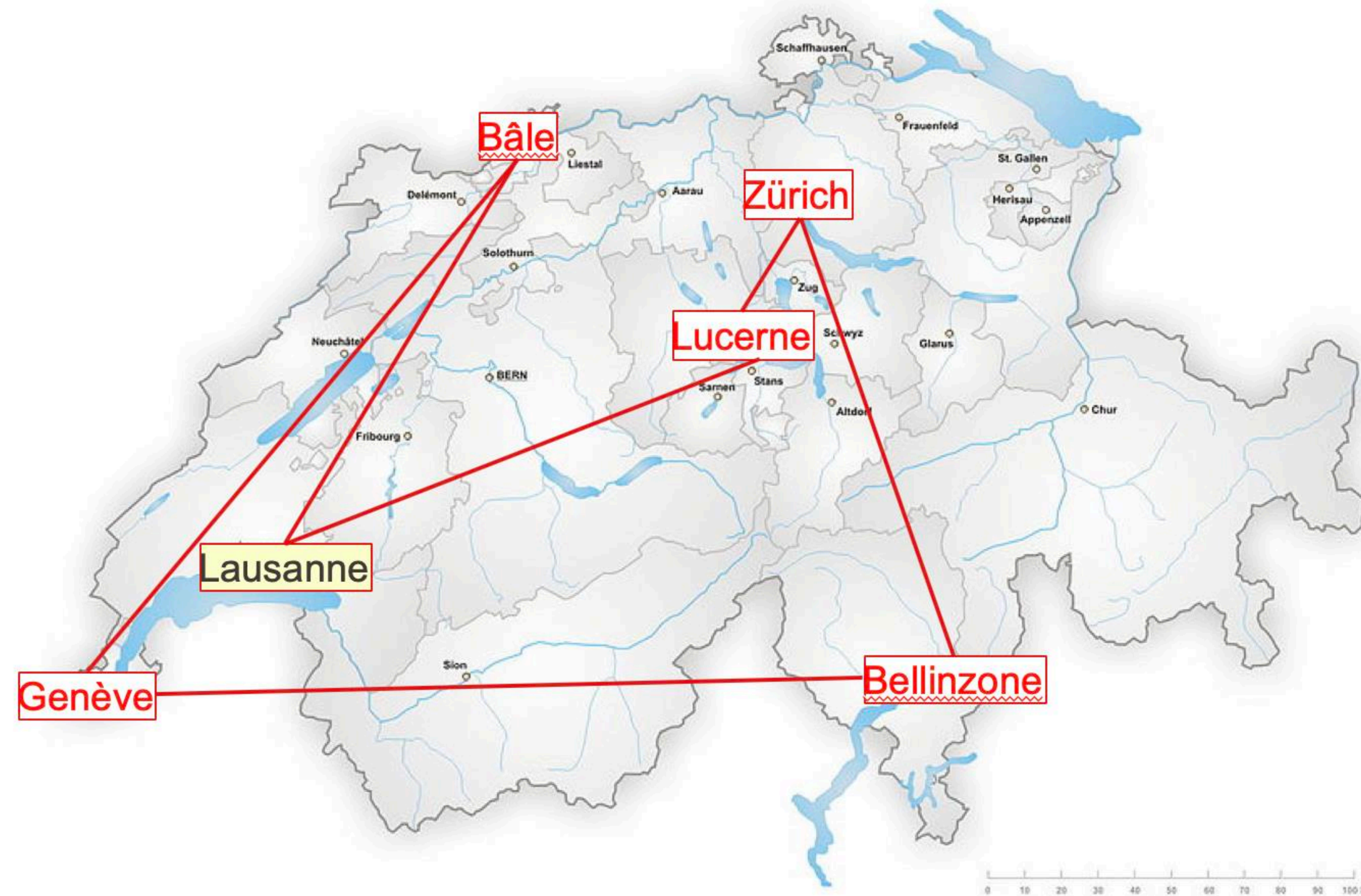
Olivier Lévêque

École polytechnique fédérale de Lausanne

Le problème du voyageur de commerce

Version « euclidienne »:

Etant donné un ensemble de n villes sur une carte, trouver le chemin fermé le plus court passant une et une seule fois par chacune de ces villes.



Note : On suppose ici des voyages à vol d'oiseau entre chaque ville.

Algorithmes de résolution

Premier essai :

Tester tous les chemins fermés possibles

➔ Cet algorithme trouve le chemin fermé optimal ✓

… mais les chemins fermés sont au nombre de $n! = n(n-1)(n-2)\ldots1$

impossible à mettre en pratique !

Algorithmes de résolution

Deuxième essai :

1. Partir d'une ville choisie au hasard
2. Tant qu'il reste une ville non-explorée, rejoindre la ville non-explorée la plus proche
3. Quand toutes les villes ont été explorées, revenir à la ville de départ

➔ complexité temporelle polynomiale en n ✓

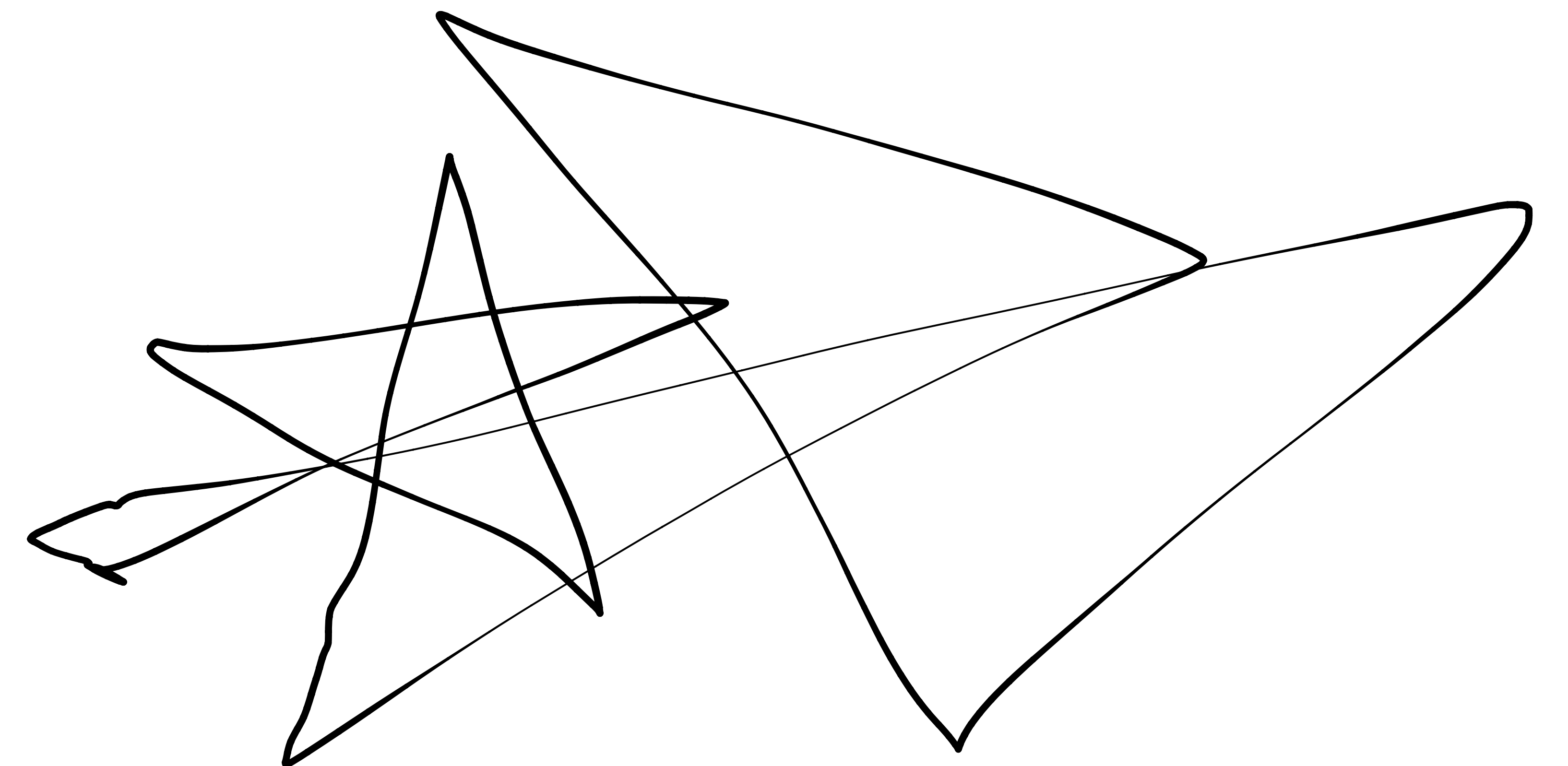
… mais le chemin fermé résultant est loin d'être optimal en général !

Algorithmes de résolution

Troisième essai :

1. Choisir un **chemin fermé** $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1} = v_1)$ au hasard
2. Effectuer une boucle pour i allant de 1 à n :

   Permuter les villes v_i et v_{i+1} dans le chemin si cette permutation raccourcit la longueur totale du chemin



Algorithmes de résolution

Troisième essai :

1. Choisir un **chemin fermé** $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1} = v_1)$ au hasard
2. Effectuer une boucle pour i allant de 1 à n :

   Permuter les villes v_i et v_{i+1} dans le chemin si cette permutation raccourcit la longueur totale du chemin

➔ complexité temporelle polynomiale en n ✓

… meilleure performance moyenne que l'algorithme précédent, mais résultat toujours aléatoire

Algorithme de résolution avec garantie d'approximation (et complexité temporelle polynomiale en n)

Théorème

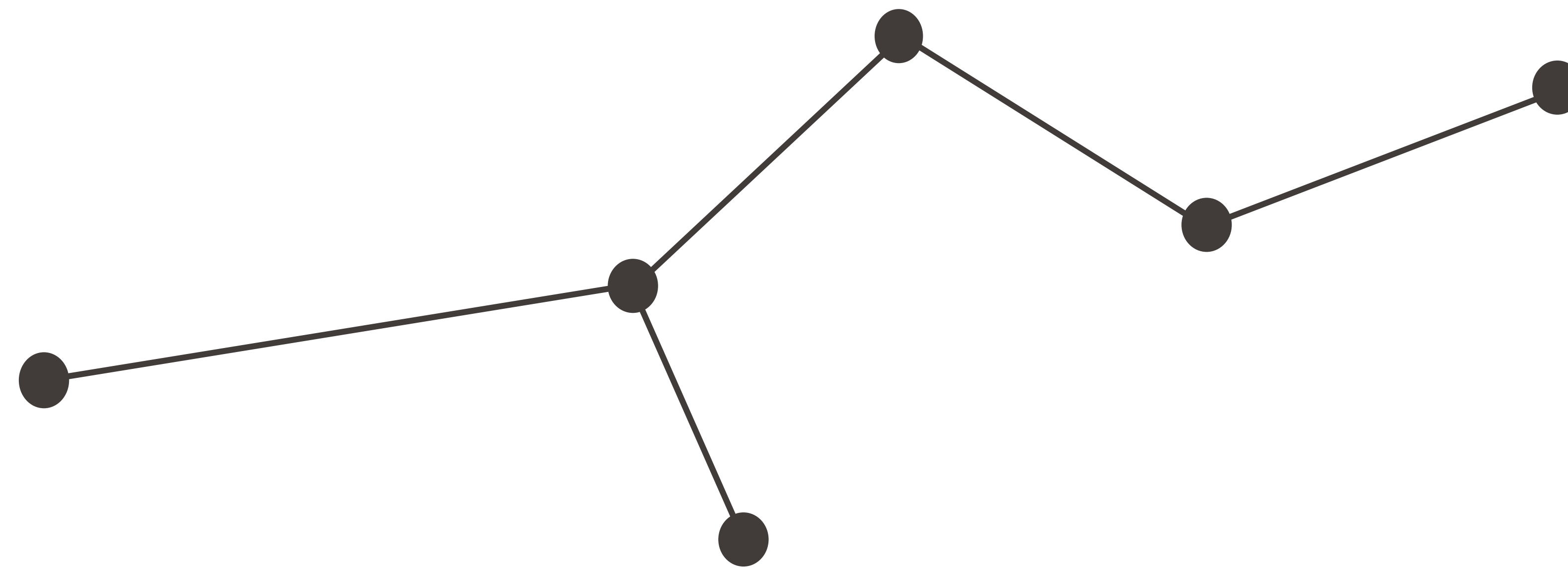
Soit L_{min} la longueur du chemin fermé optimal (i.e., le plus court). Il existe un algorithme de complexité temporelle polynomiale en n permettant de trouver un chemin fermé de longueur $L \leq 2L_{min}$.

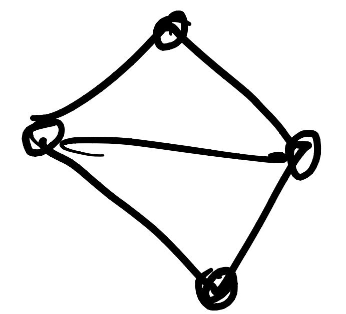
Première étape : arbre couvrant minimal

Etant données des villes sur une carte, on cherche à les relier par un arbre dont la somme des longueurs des branches soit minimale.

pas de cycle

Exemple :



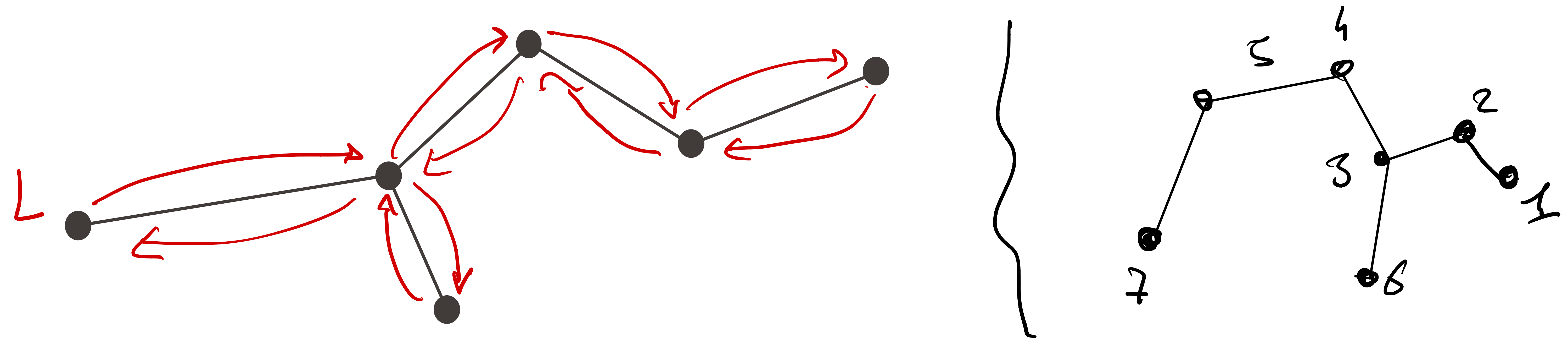


pas un arbre

Première étape : arbre couvrant minimal

Etant données des villes sur une carte, on cherche à les relier par un arbre dont la somme des longueurs des branches soit minimale.

Exemple :



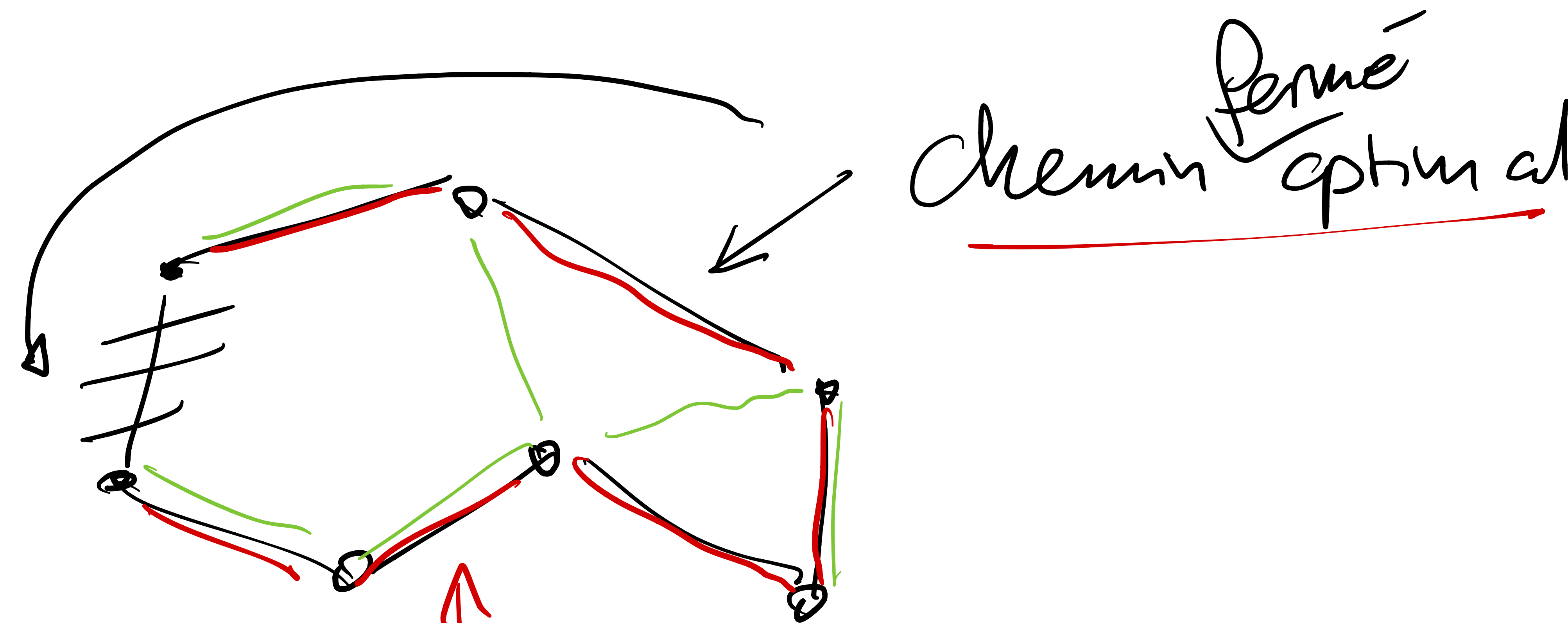
Il est possible de trouver un tel arbre (T) en temps polynomial en n :

1. Commencer avec $T = \{$une ville au hasard$\}$ (= racine de l'arbre)
2. Chercher parmi les villes restantes la ville v qui soit la plus proche d'une des villes $w \in T$: rajouter v et la branche $v - w$ à T
3. Recommencer en 2. jusqu'à ce que T contienne toutes les villes

EPFL

Remarque importante

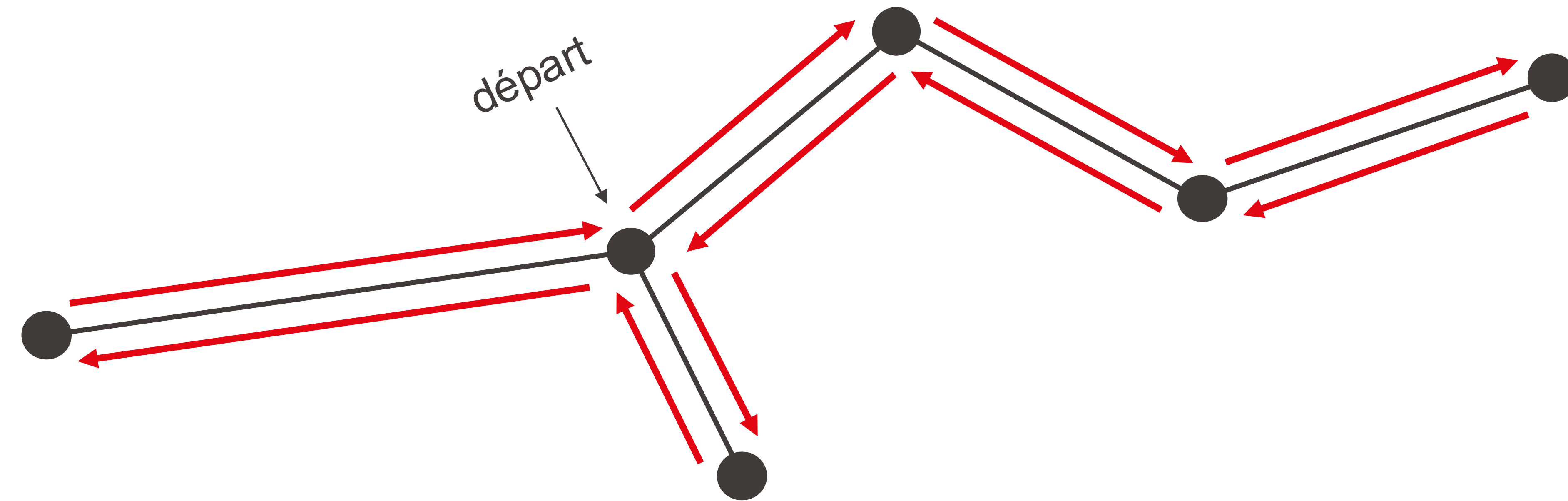
Si L_T désigne la somme des longueurs des branches de l'arbre couvrant minimal, et L_{min} désigne la longueur du chemin fermé optimal qui passe une fois par chaque ville, alors $L_{min} \geq L_T$.



L(chemin fermé optimal) ≥ L(arbre couvrant) ≥ L(arbre couvrant minimal)

Deuxième étape : parcours le long de l'arbre

Illustration



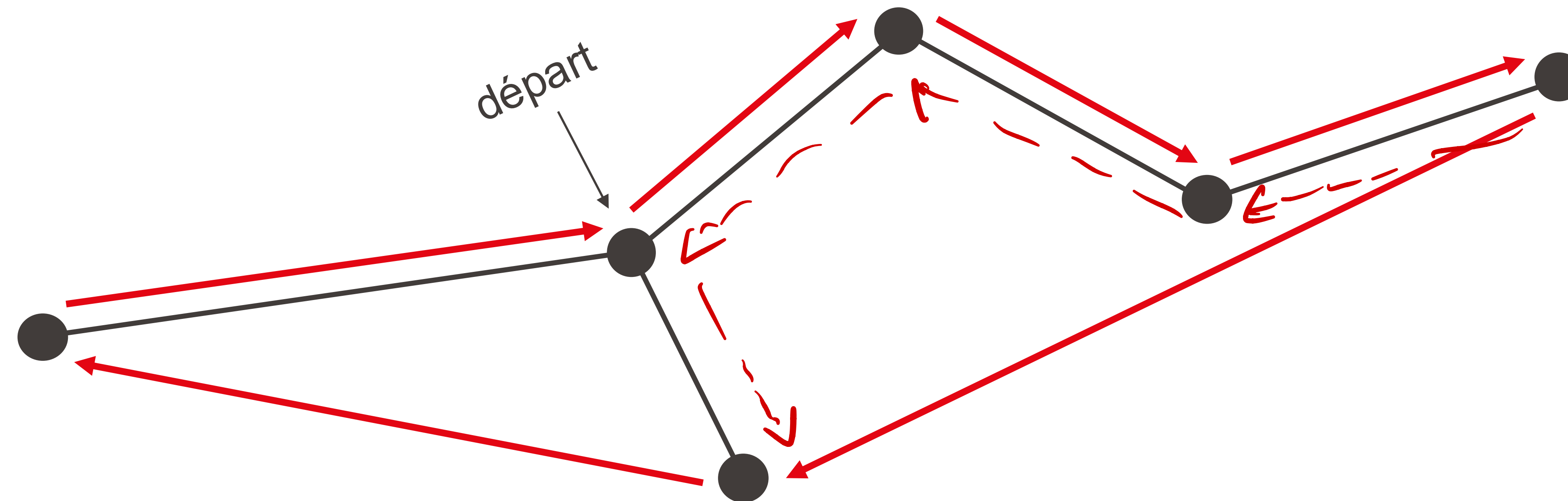
La longueur du chemin rouge vaut $2L_T \leq 2L_{min}$

$L = 2 \cdot$ Longueur des branches de l'arbre

Troisième et dernière étape : prendre des raccourcis

On modifie le chemin rouge en suivant la règle : dès qu'une ville à déjà été visitée, on prend un raccourci vers la ville suivante dans l'arbre.

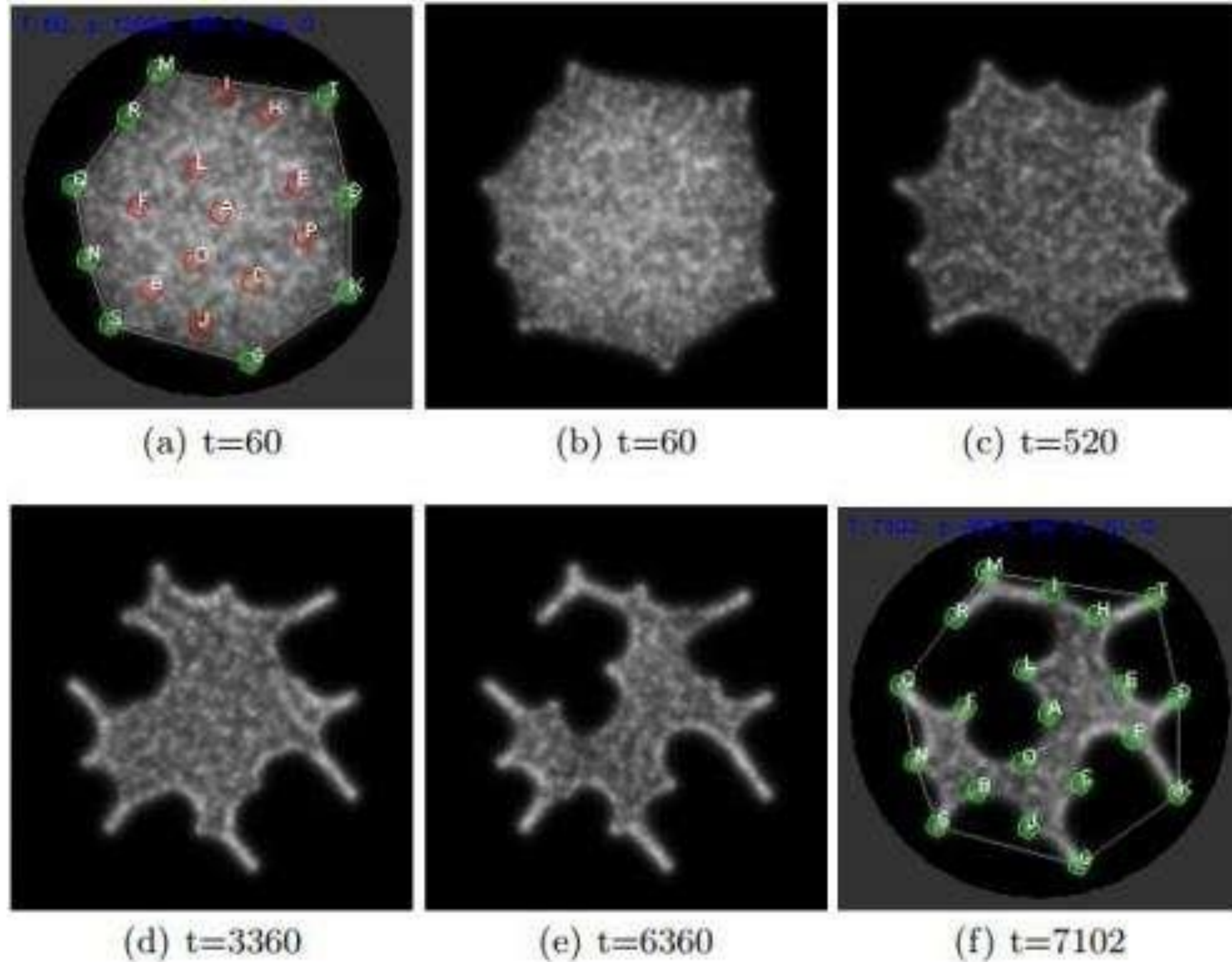
Illustration



$L' \leq L = 2 \cdot$ Longueur des branches de l'arbre couvrant minimal

$\leq 2 \cdot L_{optimale}$

Et en voilà un qui résout le problème tout seul!



Source: “Computation of the Travelling Salesman Problem by a Shrinking Blob” https://arxiv.org/abs/1303.4969

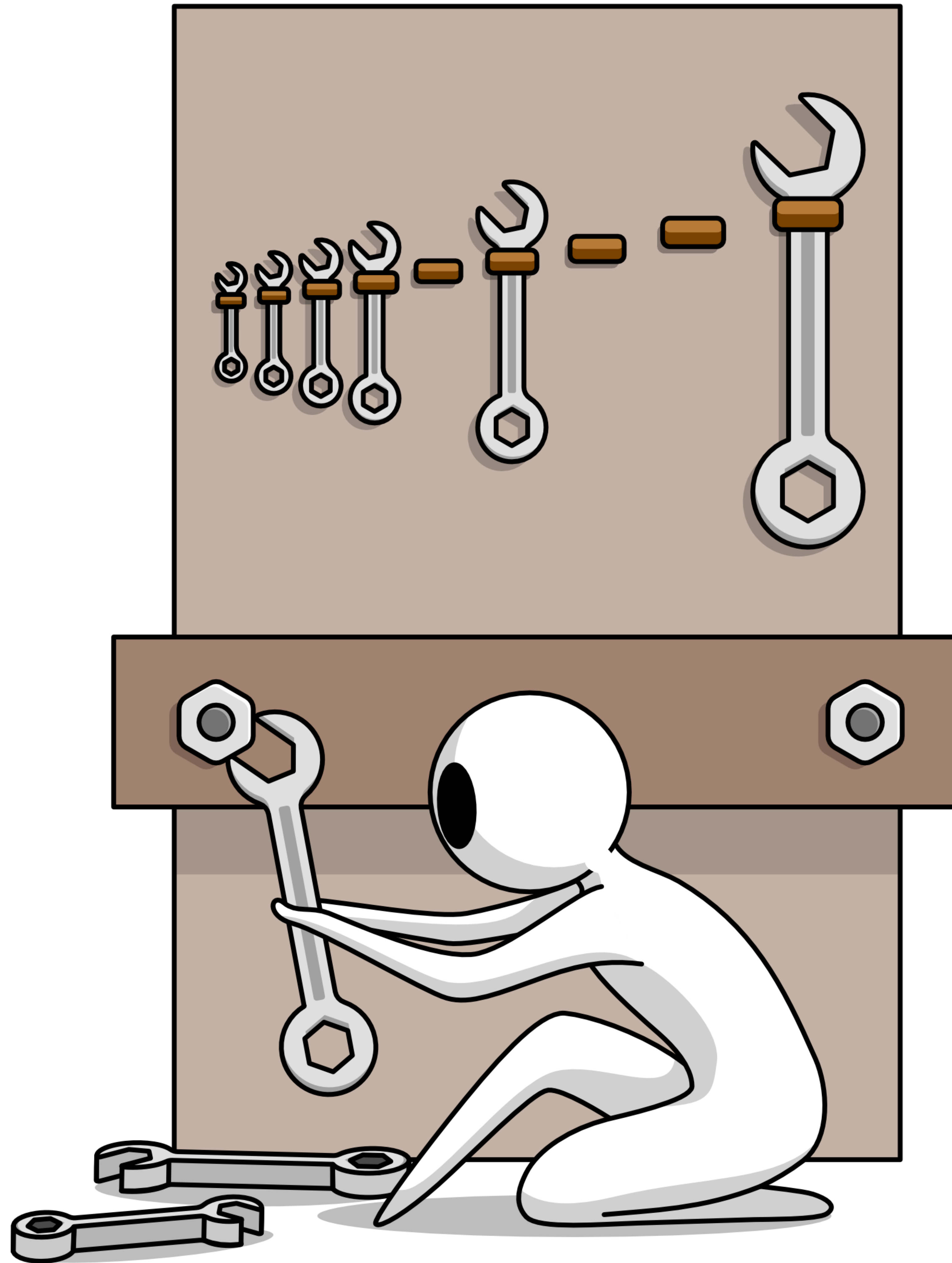
Il s’agit d’un “blob” (plus savamment, un physarum polycephalum), organisme unicellulaire capable d’optimiser sa structure interne pour accéder à de la nourriture.

EPFL

Utilisation du hasard en algorithmique

Information, Calcul et Communication

EPFL



Algorithmique et programmation avancée

Recherche de la médiane

Olivier Lévêque

École polytechnique fédérale de Lausanne

Recherche de la médiane dans une liste

Soit L une liste de n nombres. On définit:

- d'une part, sa **moyenne**: $m = \frac{L(1)+L(2)+ \dots +L(n)}{n}$
- d'autre part, sa **médiane**: c'est un nombre m_L de la liste L tel que:
  - au moins la moitié des nombres de L sont plus grands ou égaux à m_L
  - au moins la moitié des nombres de L sont plus petits ou égaux à m_L

Exemple: Si $L = (12, 17, 15, 55, 18)$, alors $m = 23{,}4$ et $m_L = 17$,
car 3 nombres de la liste sont plus ≥ 17, et 3 nombres sont ≤ 17.

→ m_L est bien mieux représentative (et fait aussi toujours partie de la liste !)

Recherche de la médiane dans une liste

Cependant:

- Il existe un algorithme simple pour calculer la moyenne.
- Mais quel algorithme utiliser pour calculer efficacement la médiane ?

(à votre tour !)

Une solution pas optimale, mais honnête…

1. Trier la liste L avec votre algorithme de tri favori (par insertion, par fusion)
2. Choisir l'élément numéro $\frac{n}{2}$ de cette liste ($\frac{n+1}{2}$ si n est impair).

Quel est le défaut principal de cet algorithme ?

Il fait *beaucoup plus* que résoudre la question posée !

Une autre solution

Généralisons un peu le problème:

Trouver le nombre de rang k dans la liste L (c'est-à-dire le k^e nombre le plus petit de la liste L; si $L = (12, 17, 15, 55, 18)$ et $k = 2$, alors la réponse est 15).

- Si k est petit (i.e. égal à $1,2,3, \ldots$) ou au contraire proche de n, il y a de nouveau une solution facile à ce problème: voyez-vous laquelle ? so $k \sim \frac{n}{2}$
- Et si maintenant k est plutôt proche de $\frac{n}{2}$, quel est le problème ce cette solution facile ? $\Theta(n^2)$ opérations

Faire appel au hasard...

- Choisissons *uniformément au hasard* un nombre p (comme “pivot”) dans la liste L.

- De là, contruisons trois sous-listes:
  - L_1, composée des nombres de L plus petits que p
  - L_2, composée des nombres de L égaux à p
  - L_3, composée des nombres de L plus grands que p

$n=7$ $k=4$

Ex: $L=(3,2,4,4,5,8,3)$

$p=5$: $L_1=(3,2,4,4,3)$ $|L_1|=5$; $L_2=(5)$ $|L_2|=1$; $L_3=(8)$ $|L_3|=1$

$p=3$: $L_1=(2)$; $L_2=(3,3)$; $L_3=(4,4,5,8)$

$p=4$: $L_1=(3,2,3)$ $|L_1|=3$; $L_2=(4,4)$ $|L_2|=2$; $L_3=(5,8)$ $|L_3|=2$

EPFL

Faire appel au hasard…

- Choisissons *uniformément au hasard* un nombre p (comme “pivot”) dans la liste L.

- De là, contruisons trois sous-listes:
  - L_1, composée des nombres de L plus petits que p
  - L_2, composée des nombres de L égaux à p
  - L_3, composée des nombres de L plus grands que p

- Si $k \leq |L_1|$, l’algorithme se relance sur la liste L_1, avec le même rang k
- Si $|L_1| < k \leq |L_1| + |L_2|$, l’algorithme sort le nombre p
- Si $k > |L_1| + |L_2|$, l’algorithme se relance sur la liste L_3, avec le rang $k' = k - |L_1| - |L_2|$.

Ecriture formelle de l'algorithme

recherche de la médiane

entrée : Liste L non-triée de nombres entiers, de taille n ; rang k
sortie : k^e plus petit nombre de la liste L

$p \leftarrow$ pivot choisi uniformément au hasard dans la liste L

$L_1 \leftarrow$ sous-liste de L composée des nombres plus petits que p
$L_2 \leftarrow$ sous-liste de L composée des nombres égaux à p
$L_3 \leftarrow$ sous-liste de L composée des nombres plus grands que p

Si $k \leq |L_1|$, sortir **recherche de la médiane**(L_1, k)
Si $|L_1| < k \leq |L_1| + |L_2|$, sortir p
Si $\mathrm{k} > |L_1| + |L_2|$, sortir **recherche de la médiane**$(L_3, k - |L_1| - |L_2|)$

Complexité temporelle moyenne

- A chaque étape, la création des trois sous-listes demande $\Theta(n)$ opérations.
- Et dans le *pire* des cas, le choix du pivot p peut toujours être malchanceux…

…de telle sorte que n étapes sont nécessaires avant que l'algorithme termine.

- En conclusion, une complexité temporelle $\Theta(n^2)$, *dans le pire des cas.*

- Mais en réalité, le choix du pivot p est bon dans au moins 50% des cas (car justement, celui-ci est choisi uniformément au hasard à chaque étape).

- De là, on peut déduire qu'*en moyenne*, la complexité temporelle de l'algorithme vaut $\Theta(n)$… *plus efficace que de trier la liste!*

EPFL

Algorithmique et programmation avancée

Tri rapide

Olivier Lévêque

École polytechnique fédérale de Lausanne

Tri rapide

- De la recherche de la médiane, nous pouvons facilement obtenir maintenant un nouvel algorithme de tri de la liste L: le **tri rapide ("quicksort")**.
- L'idée consiste à nouveau à choisir un pivot p au hasard dans la liste, puis à séparer la liste L en trois sous-listes L_1, L_2, L_3 comme auparavant, et à récursivement trier les sous-listes L_1 et L_3 avec le même algorithme.

tri rapide
entrée : Liste L non-triée de nombres entiers (de taille n) sortie : Liste L' triée
Si $n = 1$ ou $n = 0$ (liste vide), sortir : L p ← pivot choisi uniformément au hasard dans la liste L L_1, L_2, L_3 ← les trois sous-listes générées comme décrit précédemment ${L_1}'$ ← **tri rapide**(L_1) ${L_3}'$ ← **tri rapide**(L_3) Sortir : $L' = (L'_1, L_2, L'_3)$

EPFL

Complexité temporelle moyenne

- On peut montrer que celle-ci vaut $\Theta(n \cdot \log_2(n))$ *en moyenne.*

- Donc un tri aussi efficace que le tri par fusion.

- Mais notez une différence importante:

  - Dans le tri par fusion, tout le travail de tri est exécuté lors des différentes *fusions* des sous-listes.

  - Dans le tri rapide, tout le travail de tri est effectué lors des différentes *séparations* des sous-listes.