

Calcul différentiel à plusieurs variables - notations multi-indices

1 Notation multi-indices

On appelle "multi-indices" le n -uplet

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$$

On note :

1. $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$
2. $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$
3. pour $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$

2 Notation des dérivées partielles

Pour $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on notera la dérivée partielle d'ordre p par rapport au choix des p variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}$.

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

avec $|\alpha| = p$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et où $\partial x_j^{\alpha_j}$ signifie que l'on dérive α_j fois par rapport à x_j .

3 Exemples

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

1. On notera

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 1, 1)$

2. On notera

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 1, 1)$

3. On notera

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3^2} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2, 1, 2)$

4. On notera

$$\frac{\partial^7 f}{\partial x_1^4 \partial x_3^3} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (4, 0, 3)$

Remarque : la notation multi-indices ne prend pas en compte l'ordre de dérivation. Il est donc important, pour écrire les p -ième dérivées partielles de f à l'aide de cette notation de travailler dans le cas où $f \in C^p$.

4 Notation du développement de Taylor à l'ordre p pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

On note pour $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=0}^p \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}^\alpha} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha + R(\mathbf{x})$$

où le reste de Taylor est donné sous forme lagrangienne par

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\partial \mathbf{x}^\alpha} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha, \theta \in]0, 1[$$

ou sous forme intégrale par

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{p+1}{\alpha!} \int_0^1 (1-s)^p \frac{\partial^{|\alpha|} f(\mathbf{x}_0 + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\partial \mathbf{x}^\alpha} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha ds$$

Remarque : le développement de Taylor reste valide pour une fonction vectorielle $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et se note de la même manière avec la notation multi-indices

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=0}^p \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}^\alpha} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha + \mathbf{R}(\mathbf{x}).$$

On lit cette égalité composante par composante. Pour le cas d'une fonction vectorielle, le reste Lagrangien n'est pas bien défini (θ pouvant varier selon les composantes de $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$). Cependant le reste intégral reste valide :

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{p+1}{\alpha!} \int_0^1 (1-s)^p \frac{\partial^{|\alpha|} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\partial \mathbf{x}^\alpha} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha ds.$$

Ci-dessus, on comprendra le symbole \int comme l'intégrale composante par composante.

5 Exemple

Pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on peut obtenir le polynôme de Taylor à l'ordre 2

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rangle \\ &= f(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} (x_1 - x_{0,1}) + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} (x_2 - x_{0,2}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1^2} (x_1 - x_{0,1})^2 + \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1 - x_{0,1})(x_2 - x_{0,2}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2^2} (x_2 - x_{0,2})^2 \end{aligned}$$

en utilisant la formule ci-dessus avec les multi-indices

$$\alpha = (0, 0), \alpha = (1, 0), (0, 1), \alpha = (2, 0), (1, 1), (0, 2).$$

6 Remarque finale

Dans le cas d'une fonction à deux variables (mais cela serait généralisable aussi pour une fonction à n variables à l'aide des multi-indices), on peut également écrire le développement de Taylor à l'ordre p à l'aide de la convention suivante

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \nabla \rangle^k f(\mathbf{x}_0) + R(\mathbf{x})$$

où on note l'opérateur différentiel $\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \nabla \rangle^k$ (avec le binôme de Newton)

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \nabla \rangle^k = \left((x_1 - x_{0,1}) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - x_{0,2}) \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^k = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (x_1 - x_{0,1})^l \frac{\partial^l}{\partial x_1^l} (x_2 - x_{0,2})^{k-l} \frac{\partial^{k-l}}{\partial x_2^{k-l}}$$