Exercice 1. Pour s'échauffer - autre expression pour le reste de Taylor
Soit $f \in \mathcal{C}^3(]a,b[)$ et $x_0 \in]a,b[$. Montrer que

$$\forall x \in]a,b[, \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + r(x)$$

où

$$r(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t}\int_{x_0}^{s} f'''(w)\mathrm{d}w \ \mathrm{d}s \ \mathrm{d}t.$$

Indication : utiliser le théorème fondamental du calcul intégral et écrire

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} f'(s)ds.$$

Correction.
En appliquant le théorème fondamental du caclul intégral, on a

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t.$$

En itérant le processus, on a

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_0}^{x}\left(f'(x_0) + \int_{x_0}^{t} f''(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \\
&= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t}\left(f''(x_0) + \int_{x_0}^{s} f'''(w)\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}s \ \mathrm{d}t \\
&= f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\int_{x_0}^{x}(t-x_0)\mathrm{d}t + r(x) \\
&= f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + r(x).
\end{aligned}$$

Exercice 2. Pour s'échauffer encore - Taylor pour une fonction vectorielle
On a vu que le théorème des accroissements finis n'existe pas dans sa forme standard pour les fonctions vectorielles. De même le développement de Taylor n'est pas obtenable avec le reste sous sa forme Lagrangienne. On peut cependeant montrer ces résultats sous leur forme intégrale. Dans cet exercice, on va en donner un exemple par une courbe paramétrée $\gamma :]a,b[\to \mathbb{R}^n$. Soit $\gamma \in \mathcal{C}^3(]a,b[,\mathbb{R}^n)$ et $t_0 \in]a,b[$. Montrer que, pout tout $t \in]a,b[$,

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}\ddot{\gamma}(t_0)(t-t_0)^2 + \frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t}(t-s)^2 \ \dddot{\gamma}(s)\mathrm{d}s,$$

où on interprète l'intégrale d'une fonction vectorielle comme l'intégrale composante par composante.
<u>Indication :</u> Montrer tout d'abord que pour une fonction $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^3(]a,b[)$, $t_0 \in]a,b[$, on a pour tout $t \in]a,b[$

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}f''(t_0)(t-t_0)^2 + \frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t}(t-s)^2 f'''(s)\mathrm{d}s.$$

Pour cela, écrire

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t^0}^{t} f'(s)ds$$

et intégrer par partie.

Correction.

Par le théorème fondamental du calcul intégral, on a

$$\begin{aligned}
f(t) = &= f(t_0) + \int_{t_0}^{t} f'(s)\mathrm{d}s \\
&= f(t_0) + \left[-(t-s)f'(s)\right]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} (t-s)f''(s)\mathrm{d}s \\
&= f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + \int_{t_0}^{t} (t-s)f''(s)\mathrm{d}s \\
&= f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + \left[-\frac{1}{2}(t-s)^2 f''(s)\right]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}(t-s)^2 f'''(s)\mathrm{d}s \\
&= f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + \frac{1}{2}(t-t_0)^2 f''(t_0) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} (t-s)^2 f'''(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

En appliquant ce résultat à chaque composante de γ, on a finalement

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \dot\gamma(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}\ddot\gamma(t_0)(t-t_0)^2 + \frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t} (t-s)^2 \ \dddot\gamma(s)\mathrm{d}s.$$

Remarque : pour la première intégration par partie, on a choisi comme primitive pour la fonction 1 la fonction $-(t-s)$. On peut obtenir le même résultat avec un "coup classique" :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} f'(s)\mathrm{d}s &= [sf'(s)]_{t_0}^{t} - \int_{t^0}^{t} sf''(s)ds \\
&= tf'(t) - t_0 f'(t_0) - \int_{t^0}^{t} sf''(s)ds \\
&= (t-t_0)f'(t_0) + t(f'(t) - f'(t_0)) - \int_{t^0}^{t} sf''(s)ds \\
&= (t-t_0)f'(t_0) + \int_{t^0}^{t} tf''(s)ds - \int_{t^0}^{t} sf''(s)ds \\
&= (t-t_0)f'(t_0) + \int_{t^0}^{t} (t-s)f''(s)ds
\end{aligned}$$

Exercice 3. Fin de l'échauffement - quelques estimations obtenues grâce à Taylor

Soit $f \in \mathcal{C}^3(]a,b[)$. Montrer que pour tout $x_0 \in]a,b[$ et $h > 0$ tel que $x_0 + h \in]a,b[$, on a

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \frac{h}{2} f''(c) \text{ avec } c \in]x_0, x_0+h[$$

et

$$\frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} - f''(x_0) = \frac{h}{6}(f'''(c) - f'''(d)) \text{ avec } c \in]x_0, x_0+h[, d \in]x_0-h, x_0[$$

Correction.

Pour la première estimation, on a directement par le développement de Taylor

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(c)h^2, c \in]x_0, x_0+h[$$

ce qui est équivalent à

$$f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)=\frac{1}{2}h^2f''(c)$$

d'où le résultat.

Pour la seconde estimation, on considère les développements de Tayor

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+\frac{1}{6}f'''(c)h^3, d\in]x_0,x_0+h[$$

et

$$f(x_0-h)=f(x_0)-f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2-\frac{1}{6}f'''(d)h^3, d\in]x_0-h,x_0[$$

En sommant le deux développement, on obtient

$$f(x_0+h)+f(x_0-h)=2f(x_0)+h^2f''(x_0)=\frac{h^3}{6}(f'''(c)-f'''(d))$$

d'où

$$f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)-h^2f''(x_0)=\frac{h^3}{6}(f'''(c)-f'''(d))$$

d'où le résultat.

Exercice 4. Optimisation

Déterminer les points stationnaires des fonctions suivantes et étudier leur nature (point selle, extremum...):

a) $f_1(x,y)=x^3-3x+y^3-3y$

b) $f_2(x,y)=y^2+y\cos x-\sin x-2$

c) $f_3(x,y)=2x^2y-xy^2-6xy$

d) $f_4(x,y)=3x^2-xy^2+y^4$

Correction.

Pour établir la nature d'un point stationnaire, on utilise le critère du cours : si (x_0,y_0) est un point stationnaire (i.e $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$) alors

a) f admet un minimum local en (x_0,y_0) si $\det H(f)(x_0,y_0)>0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f(x_0,y_0)>0$.

b) f admet un maximum local en (x_0,y_0) si $\det H(f)(x_0,y_0)>0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f(x_0,y_0)<0$.

c) f admet un point selle en (x_0,y_0) si $\det H(f)(x_0,y_0)<0$.

d) Dans tous les autres cas, le critère ne permet pas de déterminer la nature du point stationnaire et on doit regarder la fonction "en détail".

a) Comme les dérivées partielles de f_1 sont

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)=3x^2-3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=3y^2-3\,,$$

les points stationnaires de f_1 satisfont

$$\begin{cases} x^2-1=0 \\ y^2-1=0 \end{cases}$$

Il s'agit donc de $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ et $(-1,-1)$. De plus,

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x,y)=6x\,,\quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x,y)=6y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}(x,y)=0$$

la matrice hessienne est donnée par

$$\mathrm{H}(f_1)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

et sont déterminant par

$$\det \mathrm{H}(f_1)(x,y) = 36xy$$

Par le critère du cours, $(1,1)$ est un point de minimum local, $(-1,-1)$ est un point de maximum local alors que $(1,-1)$ et $(-1,1)$ sont des points selle.

b) Etant donné que

$$\nabla f_2(x,y) = (-y\sin x - \cos x \,,\, 2y + \cos x)\,,$$

les points stationnaires satisfont les équations

$$\begin{cases} -y\sin x - \cos x = 0 \\ 2y + \cos x = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y(2 - \sin x) = 0 \\ 2y + \cos x = 0 \end{cases}$$

et sont donc de la forme $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Le calcul des dérivées de deuxième ordre nous donne

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x,y) = -y\cos x + \sin x\,, \qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x,y) = 2\,, \qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}(x,y) = -\sin x$$

et

$$\mathrm{H}(f_2)(x,y) = \begin{pmatrix} -y\cos(x) + \sin(x) & -\sin(x) \\ -\sin(x) & 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent on a que $\det \mathrm{H}(f_2)(x,y) = 2(-y\cos x + \sin x) - \sin^2 x$. Comme

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\left(\tfrac{\pi}{2} + k\pi, 0\right) = (-1)^k \qquad \text{et} \qquad \det\left(\mathrm{H}(f_2)\left(\tfrac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)\right) = 2(-1)^k - 1\,,$$

le point $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$ est un point selle si k est impair et un point de minimum local si k est pair.

c) Etant donné que

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = 4xy - y^2 - 6y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = 2x^2 - 2xy - 6x\,,$$

les points stationnaires de f_3 satisfont les équations

$$\begin{aligned} y(4x - y - 6) &= 0 \qquad (1) \\ x(2x - 2y - 6) &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

La première équation est satisfaite si $y = 0$ ou si $y = 4x - 6$.
• Si $y = 0$, la deuxième équation devient $x(2x - 6) = 0$ et nous trouvons $x = 0$ ou $x = 3$.
• Si $y = 4x - 6$, la deuxième équation devient $x(-6x + 6) = 0$ et nous trouvons $x = 0$ ou $x = 1$. Si $x = 0$ alors $y = -6$ et si $x = 1$ alors $y = -2$. Ainsi, les points stationnaires de f_4 sont

$$(0,0)\,, \quad (3,0)\,, \quad (0,-6)\,, \quad (1,-2)\,.$$

Comme

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}(x,y) = 4y\,, \ \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}(x,y) = -2x\,, \ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y}(x,y) = 4x - 2y - 6\,,$$

la matrice hessienne est

$$\mathrm{H}(f_3)(x,y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x - 2y - 6 \\ 4x - 2y - 6 & -2x \end{pmatrix}$$

et son déterminant est

$$\det \mathrm{H}(f_3)(x,y) = -8xy - (4x - 2y - 6)^2.$$

Par le critère, $(0,0)$, $(3,0)$ et $(0,-6)$ sont des points selles alors que $(1,-2)$ est un point de maximum local.

d) Comme les dérivées partielles de f_4 sont

$$\frac{\partial f_4}{\partial x}(x,y) = 6x - y^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f_4}{\partial y}(x,y) = -2xy + 4y^3 = 2y(2y^2 - x)\,,$$

les points stationnaires de f_3 satisfont

$$\begin{cases} 6x - y^2 = 0 \\ y(2y^2 - x) = 0 \end{cases}$$

La seule solution de ce système étant $(x,y) = (0,0)$, la fonction f_3 n'a qu'un point stationnaire. Etant donné que

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2}(x,y) = 6\,, \quad \frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 2x\,, \quad \frac{\partial^2 f_4}{\partial x \partial y}(x,y) = -2y$$

on a

$$\mathrm{H}(f_4)(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors $\det \mathrm{H}(f_4)(0,0) = 0$ et le critère du cours ne nous permet pas de déterminer la nature du point $(0,0)$. Néanmoins, comme

$$f_4(x,y) = y^4 - 2\tfrac{1}{2}xy^2 + (\tfrac{1}{2}x)^2 - (\tfrac{1}{2}x)^2 + 3x^2 = (y^2 - \tfrac{1}{2}x)^2 + \tfrac{11}{4}x^2 \geq 0 = f_4(0,0)\,,$$

le point $(0,0)$ est un point de minimum global.

Exercice 5. Optimisation

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x-y)^3 + 4x^2 - 3x + 3y$. On considère l'ensemble T donné par

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [-1,1] \text{ et } 0 \leq y \leq 1 - x\right\}.$$

a) Dessiner le domaine T. Est-il ouvert ou fermé ? Est-il borné ?

b) Paramétrer le bord de T.

c) Donner le minimum et le maximum global de f sur T et les points où ces derniers sont atteints.

Correction.

a) Le domaine est le triangle de sommet $(-1,0), (1,0), (-1,2)$. Il est fermé et borné.

b) Les arêtes du triangle sont paramétrées comme

- Arête de $(-1,0)$ à $(1,0)$: $\gamma_1(t) = (t,0), t \in [-1,1]$.
- Arête de $(1,0)$ à $(-1,2)$: $\gamma_2(t) = (t, 1-t), t \in [-1,1]$
- Arête de $(-1,2)$ à $(-1,0)$: $\gamma_3(t) = (-1,t), t \in [0,2]$

Remarque : la paramétrisation n'est pas unique. Ici on présente une paramétrisation "naturelle". On aurait aussi pu utiliser la formule du cours : pour (x_0,y_0) et (x_1,y_1), une paramétrisation du segment de (x_0,y_0) à (x_1,y_1) est donnée par

$$\gamma(t) = t(x_0,y_0) + (1-t)(x_1,y_1), t \in [0,1]$$

ou encore

$$\tilde{\gamma}(t) = (x_0,y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0), t \in [0,1].$$

c) La fonction est continue sur un ensemble fermé et borné, il existe donc un maximum global et un minimum global. On cherche tout d'abord les maxima locaux et minimaux parmi les points :

(a) Les points stationnaires à l'intérieur de T : tous les (x, y) tels que $x \neq -1$ et $y \neq 0$ et $y \neq 1 - x$.

(b) Les points à l'intérieur de T où f n'est pas différentiable.

(c) Les points sur le bord ∂T.

Il n'y a pas de points de la catégorie (b) comme f est un polynôme (donc différentiable). Pour les points de catégorie (a) : les points stationnaires sont donnés par les équations $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ qui sont

$$\begin{cases} 3(x-y)^2 + 8x - 3 = 0 \\ -3(x-y)^2 + 3 = 0. \end{cases}$$

Les points stationnaires sont donc $(0, 1)$ et $(0, -1)$. $(0, 1)$ est bien dans l'intérieur de T mais pas $(0, -1)$, on ne va donc pas le considérer. Pour déterminer la nature de $(0, 1)$, on calcule la matrice hessienne de f en ce point :

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 6(x-y)+8 & -6(x-y) \\ -6(x-y) & 6(x-y) \end{pmatrix} \Rightarrow H(f)(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det H(f)(0, 1) = -48 < 0$, on a un point selle donc $(0, 1)$ n'est pas un point à extremum local.

Pour les points sur le bord, on considère les fonctions

$$f_1(t) = f(\gamma_1(t)) = t^3 + 4t^2 - 3t, t \in [-1, 1].$$

$$f_2(t) = f(\gamma_2(t)) = (2t-1)^3 + 4t^2 - 6t + 3, t \in [-1, 1].$$

$$f_3(t) = f(\gamma_3(t)) = (-1-t)^3 + 7 + 3t, t \in [0, 2].$$

On cherche les candidats aux extrema globaux parmi les points aux extrémités et dans les points où la dérivée des f_i s'annule, puis on compare les valeurs :

- $f_1(-1) = 6, f_1(1) = 2$ et $f_1'(t) = 3t^2 + 8t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -3$ ou $t = \frac{1}{3}$. Seul $\frac{1}{3} \in [-1, 1]$. On calcule $f_1(\frac{1}{3}) = \frac{-14}{27}$.
- $f_2(-1) = -14$, $f_2(1) = 2$ et $f_2'(t) = 6(2t-1)^2 + 8t - 6 = 3t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0, \frac{2}{3}$. $f_2(0) = 2, f_2(\frac{2}{3}) = \frac{22}{27}$.
- $f_3(0) = 6, f_3(2) = -14$ et $f_3'(t) = -3(-1-t)^2 + 3 = -3t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 0, -2$. $-2 \notin [0, 2]$ et $f_3(0)$ a déjà été calculé.

Le minimum global est donc atteint en $\gamma_2(-1) = \gamma_3(2) = (-1, 2)$ et vaut -14. Le maximum global est atteint en $\gamma_3(0) = \gamma_1(-1) = (-1, 0)$ et vaut 6.

Exercice 6. Optimisation

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = -\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$. On considère le domaine C donné par

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + (y-3)^2 \leq 16\right\}.$$

a) Décrire les ensembles de niveau de f.

b) Donner le minimum et le maximum globaux de f sur C et les points où ces derniers sont atteints.

Correction.

a) Pour calculer les ensembles de niveaux, on observe tout d'abord que $\text{Im} f = \mathbb{R}_-$. Pour $c = 0$, l'ensemble de niveau associé à c est le point $(1, 3)$, sinon pour $c < 0$, l'ensemble des (x, y) tels que $f(x, y) = c$ est un cercle de rayon $-c > 0$ et de centre $(1, 3)$.

b) C est le disque de rayon 4 centré en $(1,3)$. Il est fermé et borné, donc f admet un maximum global et un minimum global sur C, comme elle est continue. On cherche les extrema dans les points

(a) Les points stationnaires à l'intérieur de C : tous les (x,y) tels que $(x-1)^2+(y-3)^2<16$.

(b) Les points à l'intérieur de C où f n'est pas différentiable.

(c) Les points sur le bord ∂C.

On calcule le gradient de $f(x,y)$:

$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}}, -\frac{y-3}{\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}} \right).$$

Les fonctions racines sont différentiables sauf là où elles s'annulent. On a donc aucun point stationnaire, mais un point de catégorie (b) en $(1,3)$ avec $f(1,3)=0$. Puisque $f(x,y)<0$ pour tout $(x,y)\neq(1,3)$, on a forcément que $(1,3)$ est un point à maximum global (et il est unique).

Comme les courbes de niveaux de la fonction $f(x,y)$ sont des cercles centrés en $(1,3)$, telles que plus le rayon du cercle est grand, plus la valeur de la fonction est négative, on a que $f(x,y)=-4$ pour tout $(x,y)\in\partial C$ et tous ces (x,y) sont des points à minima globaux.

Exercice 7. Révision - règle de la chaine : Dérivation en coordonnées polaires - gradient

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on définit le changement en coordonnées polaires par

$$\begin{cases} x = X(r,\theta) = r\cos\theta, \\ y = Y(r,\theta) = r\sin\theta, \end{cases}$$

avec $r\geq 0$ et $\theta\in[0,2\pi[$.

Réciproquement, avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on notera $r=R(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ et

$$\theta = \Theta(x,y) = \begin{cases} \arctan(y/x), & y\geq 0, x>0, \\ \frac{\pi}{2}, & y\geq 0, x=0, \\ \arctan(y/x)+\pi, & x<0, \\ \frac{3\pi}{2}, & y<0, x=0, \\ \arctan(y/x)+2\pi, & y<0, x>0. \end{cases}$$

Soit $f=f(x,y)$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On définit

$$\tilde{f}(r,\theta) = f(X(r,\theta),Y(r,\theta)),$$

et réciproquement

$$f(x,y) = \tilde{f}(R(x,y),\Theta(x,y)).$$

a) Montrer que si l'on définit $(x,y)=\phi(r,\theta)=(X(r,\theta),Y(r,\theta))=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ on a

$$\nabla_{r,\theta}\tilde{f}(r,\theta) = \left(\tfrac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(r,\theta) \quad \tfrac{\partial}{\partial\theta}\tilde{f}(r,\theta)\right) = \nabla_{x,y}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\nabla_{r,\theta}\phi(r,\theta),$$

où on interpréte les gradients $\nabla_{r,\theta}\tilde{f}$ et $\nabla_{x,y}f$ comme des matrices 1×2 et la jacobienne $\nabla_{r,\theta}\phi$ comme une matrice 2×2.

b) Si on pose $(r,\theta)=\phi^{-1}(x,y)=(R(x,y),\Theta(x,y))$, montrer que

$$\nabla_{x,y}f(x,y) = \nabla_{r,\theta}\tilde{f}(R(x,y),\Theta(x,y))\nabla_{x,y}\phi^{-1}(x,y).$$

(Pour simplifier la preuve, on supposera $x,y>0$)

Correction.

a) On applique la règle de la chaine

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) =& \frac{\partial}{\partial r} f(X(r,\theta), Y(r,\theta)) \\ =& \frac{\partial}{\partial x} f(X(r,\theta), Y(r,\theta)) \frac{\partial X}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial}{\partial y} f(X(r,\theta), Y(r,\theta)) \frac{\partial Y}{\partial r}(r,\theta) \\ =& \frac{\partial}{\partial x} f(X(r,\theta), Y(r,\theta)) \cos\theta + \frac{\partial}{\partial y} f(X(r,\theta), Y(r,\theta)) \sin\theta.\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) =& \frac{\partial}{\partial \theta} f(X(r,\theta), Y(r,\theta)) \\ =& \frac{\partial}{\partial x} f(X(r,\theta), Y(r,\theta)) \frac{\partial X}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial}{\partial y} f(X(r,\theta), Y(r,\theta)) \frac{\partial Y}{\partial \theta}(r,\theta) \\ =& \frac{\partial}{\partial x} f(X(r,\theta), Y(r,\theta))(-r\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial y} f(X(r,\theta), Y(r,\theta))(r\cos\theta).\end{aligned}$$

Or si on caclucle la jacobienne de ϕ, on a

$$\nabla_{r,\theta}\phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial X}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \frac{\partial Y}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial Y}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\cos\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

On a bien alors

$$\nabla_{r,\theta}\tilde{f}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(r,\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}\tilde{f}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(r\cos\theta, r\sin\theta) & \frac{\partial}{\partial y} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\cos\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

b) On applique la règle de la chaine

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =& \frac{\partial}{\partial x}\tilde{f}(R(x,y), \Theta(x,y)) \\ =& \frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(R(x,y), \Theta(x,y)) \frac{\partial R}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial}{\partial \theta}\tilde{f}(R(x,y), \Theta(x,y)) \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,y) \\ =& \frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(R(x,y), \Theta(x,y)) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial}{\partial \theta}\tilde{f}(R(x,y), \Theta(x,y)) \frac{-y/x^2}{1+y^2/x^2} \\ =& \frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(R(x,y), \Theta(x,y)) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial}{\partial \theta}\tilde{f}(R(x,y), \Theta(x,y)) \frac{-y}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =& \frac{\partial}{\partial y}\tilde{f}(R(x,y), \Theta(x,y)) \\ =& \frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(R(x,y), \Theta(x,y)) \frac{\partial R}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial}{\partial \theta}\tilde{f}(R(x,y), \Theta(x,y)) \frac{\partial \Theta}{\partial y}(x,y) \\ =& \frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(R(x,y), \Theta(x,y)) \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial}{\partial \theta}\tilde{f}(R(x,y), \Theta(x,y)) \frac{x}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

La jacobienne vaut

$$\nabla_{x,y}\phi^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial R}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \Theta}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

On a bien

$$\begin{aligned}\nabla_{x,y} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \end{pmatrix} &= \nabla_{r,\theta}\tilde{f}(R(x,y), \Theta(x,y))\nabla_{x,y}\phi^{-1}(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(R(x,y), \Theta(x,y)) & \frac{\partial}{\partial \theta}\tilde{f}(R(x,y), \Theta(x,y)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercice 8. Révisions - polynômes de Taylor

a) Donner le polynôme de Taylor à l'ordre 1 autour de $(1, 2)$ de la fonction $f(x, y) = \ln(4 - x - y)$.

b) Donner le polynôme de Taylor à l'ordre 2 autour de $(1, -1)$ de la fonction $f(x, y) = e^{x^2+y^2-y-3}$.

Correction.

a) *Méthode 1 :* par la formule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{4 - x - y}.$$

On a alors

$$p_1(x, y) = f(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2) = -(x - 1) - (y - 2) = -x - y + 3.$$

Méthode 2 : par composition

Quand (x, y) est autour de $(1, 2)$, $4-x-y$ est autour de 1, on écrit donc $f(x, y) = \ln(1+g(x, y))$ avec $g(x, y) = 3 - x - y$ et on développe $\ln(1 + z)$ autour de $z = 0$ et on écrit $3 - x - y$ autour de $(1, 2)$.

- $p_1^{\ln(1+z)} = z$
- $3 - x - y = 3 - (x - 1 + 1) - (y - 2 + 2) = -(x - 1) - (y - 2)$

D'où $p_1(x, y) = p_1^{\ln(1+z)}(-(x - 1) - (y - 2)) = -(x - 1) - (y - 2) = -x - y + 3$.

b) *Méthode 1 :* par la formule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x^2+y^2-y-3}2x, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x^2+y^2-y-1}(2y - 1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = e^{x^2+y^2-y-3}(4x^2 + 2), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = e^{x^2+y^2-y-1}((2y - 1)^2 + 2),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = e^{x^2+y^2-y-3}2x(2y - 1).$$

D'où

$$\begin{aligned}
p_2(x, y) &= f(1, -1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, -1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1)(y + 1) \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1)(x - 1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, -1)(x - 1)(y + 1) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -1)(y + 1)^2 \\
&= 1 + 2(x - 1) - 3(y + 1) + 3(x - 1)^2 - 6(x - 1)(y + 1) + \frac{11}{2}(y + 1)^2 \\
&= 3x^2 + \frac{11}{2}y^2 - 6xy - 10x + 14y + \frac{15}{2}
\end{aligned}$$

Méthode 2 : par composition

Quand (x, y) est autour de $(1, -1)$, on a $x^2 + y^2 - y - 3$ autour de 0, on écrit alors $f(x, y)$ comme $e^{g(x,y)}$ et on développe e^z autour de 0 et $g(x, y) = x^2 + y^2 - y - 3$ autour de $(1, -1)$.
On a $p_2^{e^z}(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2$ et

$$\begin{aligned}
g(x, y) &= (x-1+1)^2+(y+1-1)^2-(y+1-1)-3 = (x-1)^2+2(x-1)+1+(y+1)^2-2(y+1)+1-(y+1)-2 \\
&= (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 2(x - 1) - 3(y + 1)
\end{aligned}$$

D'où

$$p_2^{e^z}(g(x,y)) = 1+(x-1)^2+(y+1)^2+2(x-1)-3(y+1)+\frac{1}{2}((x-1)^2+(y+1)^2+2(x-1)-3(y+1))^2$$
$$= 1 + 2(x-1) - 3(y+1) + (x-1)^2 + (y+1)^2$$
$$+\frac{1}{2}(4(x-1)^2 + 9(y+1)^2 - 12(x-1)(y+1)) + \text{ termes d'ordre supérieur}$$

En ne gardant que les termes d'ordre au plus 2, on retrouve

$$p_2(x,y) = 1+2(x-1)-3(y+1)+3(x-1)^2-6(x-1)(y+1)+\frac{11}{2}(y+1)^2 = 3x^2+\frac{11}{2}y^2-6xy-10x+14y+\frac{15}{2}.$$

Exercice 9. Matrice symétrique 2×2 (facultatif)

Soit $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

a) Montrer que A est diagonalisable sur les réels, c'est-à-dire que A a toujours 2 valeurs propres réelles.

b) Montrer qu'il existe v_1, v_2 une base de vecteurs propres de A qui est orthonormale, c'est-à-dire $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ et $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. *Indication :* on pourra utiliser l'identité $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle$ vraie pour tout x, y et toute matrice A.

c) Montrer que A est définie positive $\iff$ ses deux valeurs propres sont strictement positives.

Remarque : en remplaçant A par $-A$, on a naturellement le résultat similaire : A est définie négative $\iff$ ses deux valeurs propres sont strictement négative.

Correction.

a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b\end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A s'écrit comme

$$\chi_A(t) = t^2 - \mathrm{tr}At + \det A = t^2 - (a+b)t + ab - c^2.$$

Son discriminant est donc

$$\Delta = (a+b)^2 - 4ab + 4c^2 = (a-b)^2 + 4c^2 \geq 0.$$

Donc il existe toujours deux racines réelles de χ_A, donc toujours deux valeurs propres réelles.

b) Soient λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de A. On distingue deux cas :

cas 1: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, dans ce cas $A = \lambda I_2$ et donc en particulier $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ donnent un base propre orthonormale.

cas 2: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Au moins une des valeurs propres est différente de 0. Sans perdre de généralité supposons que c'est λ_2. Soient v_1 et v_2 deux vecteurs propres non nuls associés respectivement à λ_1 et λ_2. On a

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_2\rangle &= \langle v_1, \frac{\lambda_2}{\lambda_2}v_2\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda_2}\langle v_1, Av_2\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda_2}\langle Av_1, v_2\rangle \quad \text{car } A \text{ est symétrique} \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\langle v_1, v_2\rangle\end{aligned}$$

Dès lors, soit $\lambda_1 = 0$, et dans ce cas on obtient directement que $\langle v_1, v_2\rangle = 0$, soit $\lambda_1 \neq 0$, mais dans ce cas $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \neq 1$ et la seule possibilité pour que l'égalité soit satisfaite est que $\langle v_1, v_2\rangle = 0$.

Dans tous les cas on trouve alors que v_1 et v_2 sont orthogonals. Pour obtenir une base orthonormale, il suffit alors de choisir $\frac{v_1}{\|v_1\|}$ et $\frac{v_2}{\|v_2\|}$.

c) On montre les deux directions. Supposons que A soit définie positive, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\langle Ax, x\rangle \geq C\|x\|^2., \forall x \in \mathbb{R}^2$$

Alors en particulier pour v_i, un vecteur propre associé à λ_i, on a

$$\langle Av_i, v_i\rangle = \lambda_i\|v_i\|^2 \geq C\|v_i\|^2$$

d'où nécessairement $\lambda_i > 0$. Réciproquement supposons $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$. Ecrivons x dans une base propre orthonormale : on a $x = x_1v_1 + x_2v_2$. On a alors

$$\begin{aligned}\langle Ax, x\rangle &= \langle A(x_1v_1 + x_2v_2, x_1v_1 + x_2v_2\rangle \\ &= \langle \lambda_1x_1v_1 + \lambda_2x_2v_2, x_1v_1 + x_2v_2\rangle \\ &= \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 \\ &\geq \lambda_2(x_1^2 + x_2^2) = \lambda_2\|x\|^2\end{aligned}$$

On obtient donc que A est définie positive en posant $C = \lambda_2$.

Exercice 10. Théorème de Schwarz (facultatif)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^2$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ existent dans un voisinage de x_0 et $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ sont continues en x_0. Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0).$$

Indication : Considérer la fonction

$$\Delta(s,t) = f(x_0 + se_1 + te_2) - f(x_0 + se_1) - f(x_0 + te_2) + f(x_0), \quad (s,t) \in [0,1] \times [0,1]$$

et utiliser le théorème des accroissements finis pour calculer $\lim_{s\to 0^+} \frac{1}{s^2}\Delta(s,s)$ de deux manières différentes.

Correction.

Étape 1 : Soit

$$g(u) = f(x_0 + ue_1 + te_2) - f(x_0 + ue_1), \quad h(v) = f(x_0 + se_1 + ve_2) - f(x_0 + ve_2).$$

On vérifie que

$$\Delta(s,t) = g(s) - g(0) = h(t) - h(0).$$

Étape 2 : En appliquant le théorème des accroissements finis sur h et g, on a

$$g(s) - g(0) = g'(\tilde{s})s = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \tilde{s}e_1 + te_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \tilde{s}e_1)\right) s = (\varphi(t) - \varphi(0))s,$$

où $\tilde{s} \in]0,s[$ et $\varphi(w) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \tilde{s}e_1 + we_2)$.

$$h(t) - h(0) = h'(\tilde{t})t = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + se_1 + \tilde{t}e_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \tilde{t}e_2)\right) t = (\psi(s) - \psi(0))t,$$

où $\tilde{t} \in]0,t[$ et $\psi(w) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \tilde{w}e_1 + \tilde{t}e_2)$.

Étape 3 : En appliquant à nouveau le théorème des accroissements finis sur φ et ψ, on obtient

$$g(s) - g(0) = \varphi'(\hat{t})st = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0 + \tilde{s}e_1 + \hat{t}e_2)st, \quad \hat{t} \in]0,t[,$$

et

$$h(t)-h(0)=\psi'(\hat{s})st=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\hat{s}e_1+\tilde{t}e_2)st, \quad \hat{s}\in]0,s[.$$

Étape 4 : En particulier,

$$\begin{aligned}\Delta(s,s)=&g(s)-g(0)=h(s)-h(0)\\ =&\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\tilde{s}e_1+\hat{t}e_2)s^2=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\tilde{s}e_1+\hat{t}e_2)s^2.\end{aligned}$$

Si $s\to 0^+$, alors $\tilde{s},\tilde{t},\hat{s},\hat{t}\to 0$ et comme les dérivées sont continues en x_0, on a finalement

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{1}{s^2}\Delta(s,s)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0).$$

Exercice 11. Développement de Taylor à l'ordre 3 (facultatif)

Soit $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction que l'on suppose $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, Ω ouvert.
Une astuce pour obtenir la formule du développement de Taylor consiste, pour $x_0,x\in\Omega$ tels que $[x_0,x]\in\Omega$, avec $x=(x_1,x_2)$, $x_0=(x_{0,1},x_{0,2})$, à considérer la fonction $g=f\circ\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ où $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ est la courbe paramétrée définie par $\gamma(t)=x_0+t(x-x_0)$, $t\in\mathbb{R}$ (paramétrisation d'une droite passant par x et x_0). Puisque $f(x)=g(1)$ et $f(x_0)=g(0)$, on considère le développement de Taylor de g à l'ordre n

$$g(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}g^{(k)}(0)t^k+r_g(t).$$

En évaluant en $t=1$, on obtient

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}g^{(k)}(0)+r_g(1).$$

On peut montrer que $r_g(1)$ redonne les expressions possibles pour le reste vues en cours et que $r_g(1)=o(\|x-x_0\|^n)$.
Utiliser cette astuce pour calculer le développement de Taylor à l'ordre 3 de f, *i.e.*,

$$\begin{aligned}f(x)=&f(x_0)+\langle\nabla f(x_0),x-x_0\rangle+\frac{1}{2}\langle H(f)(x_0)(x-x_0),x-x_0\rangle\\ &+\frac{1}{3!}\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x_1^{3-k}\partial x_2^k}(x_1-x_{0,1})^{3-k}(x_2-x_{0,2})^k+o(\|x-x_0\|^3).\end{aligned}$$

Correction.

On note

$$f_{x_i}=\frac{\partial f}{x_i}(\gamma(t)),\quad \dot{\gamma}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_i(t)=x_i-x_{0,i}.$$

On calcule $g'(t),g''(t),g'''(t)$ en utilisant la règle de la chaine, puis on évalue en $t=0$.

$$g'(t)=f_{x_1}\dot{\gamma}_1+f_{x_2}\dot{\gamma}_2,$$

$$\begin{aligned}g''(t)=&f_{x_1x_1}(\dot{\gamma}_1)^2+f_{x_2x_1}\dot{\gamma}_2\dot{\gamma}_1+f_{x_1x_2}\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2+f_{x_2x_2}(\dot{\gamma}_2)^2\\ =&f_{x_1x_1}(\dot{\gamma}_1)^2+2f_{x_1x_2}\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2+f_{x_2x_2}(\dot{\gamma}_2)^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g'''(t)=&f_{x_1x_1x_1}(\dot{\gamma}_1)^3+f_{x_2x_1x_1}\dot{\gamma}_2(\dot{\gamma}_1)^2+2f_{x_1x_1x_2}(\dot{\gamma}_1)^2\dot{\gamma}_2\\ &+2f_{x_2x_1x_2}\dot{\gamma}_2\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2+f_{x_1x_2x_2}\dot{\gamma}_1(\dot{\gamma}_2)^2+f_{x_2x_2x_2}(\dot{\gamma}_2)^3\\ =&f_{x_1x_1x_1}(\dot{\gamma}_1)^3+3f_{x_1x_1x_2}(\dot{\gamma}_1)^2\dot{\gamma}_2+3f_{x_1x_2x_2}\dot{\gamma}_1(\dot{\gamma}_2)^2+f_{x_2x_2x_2}(\dot{\gamma}_2)^3.\end{aligned}$$