Exercice 1. Pour s'échauffer - autre expression pour le reste de Taylor
Soit $f \in \mathcal{C}^3(]a,b[)$ et $x_0 \in]a,b[$. Montrer que

$$\forall x \in]a,b[, \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + r(x)$$

où

$$r(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t}\int_{x_0}^{s} f'''(w)\mathrm{d}w \ \mathrm{d}s \ \mathrm{d}t.$$

Indication : utiliser le théorème fondamental du calcul intégral et écrire

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} f'(s)ds.$$

Exercice 2. Pour s'échauffer encore - Taylor pour une fonction vectorielle
On a vu que le théorème des accroissements finis n'existe pas dans sa forme standard pour les fonctions vectorielles. De même le développement de Taylor n'est pas obtenable avec le reste sous sa forme Lagrangienne. On peut cependeant montrer ces résultats sous leur forme intégrale. Dans cet exercice, on va en donner un exemple par une courbe paramétrée $\gamma :]a,b[\to \mathbb{R}^n$. Soit $\gamma \in \mathcal{C}^3(]a,b[,\mathbb{R}^n)$ et $t_0 \in]a,b[$. Montrer que, pout tout $t \in]a,b[$,

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \dot\gamma(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}\ddot\gamma(t_0)(t-t_0)^2 + \frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t}(t-s)^2 \ \dddot\gamma(s)\mathrm{d}s,$$

où on interprète l'intégrale d'une fonction vectorielle comme l'intégrale composante par composante.
Indication : Montrer tout d'abord que pour une fonction $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^3(]a,b[)$, $t_0 \in]a,b[$, on a pour tout $t \in]a,b[$

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}f''(t_0)(t-t_0)^2 + \frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t}(t-s)^2 f'''(s)\mathrm{d}s.$$

Pour cela, écrire

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t^0}^{t} f'(s)ds$$

et intégrer par partie.

Exercice 3. Fin de l'échauffement - quelques estimations obtenues grâce à Taylor
Soit $f \in \mathcal{C}^3(]a,b[)$. Montrer que pour tout $x_0 \in]a,b[$ et $h > 0$ tel que $x_0 + h \in]a,b[$, on a

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \frac{h}{2}f''(c) \text{ avec } c \in]x_0, x_0+h[$$

et

$$\frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} - f''(x_0) = \frac{h}{6}(f'''(c) - f'''(d)) \text{ avec } c \in]x_0, x_0+h[, d \in]x_0-h, x_0[$$

Exercice 4. Optimisation
Déterminer les points stationnaires des fonctions suivantes et étudier leur nature (point selle, extremum...):

a) $f_1(x,y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$

b) $f_2(x,y) = y^2 + y\cos x - \sin x - 2$

c) $f_3(x,y) = 2x^2y - xy^2 - 6xy$

d) $f_4(x,y) = 3x^2 - xy^2 + y^4$

Exercice 5. Optimisation

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x-y)^3 + 4x^2 - 3x + 3y$. On considère l'ensemble T donné par

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [-1,1] \text{ et } 0 \leq y \leq 1 - x\right\}.$$

a) Dessiner le domaine T. Est-il ouvert ou fermé ? Est-il borné ?

b) Paramétrer le bord de T.

c) Donner le minimum et le maximum global de f sur T et les points où ces derniers sont atteints.

Exercice 6. Optimisation

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = -\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$. On considère le domaine C donné par

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + (y-3)^2 \leq 16\right\}.$$

a) Décrire les ensembles de niveau de f.

b) Donner le minimum et le maximum globaux de f sur C et les points où ces derniers sont atteints.

Exercice 7. Révision - règle de la chaine : Dérivation en coordonnées polaires - gradient

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on définit le changement en coordonnées polaires par

$$\begin{cases} x = X(r,\theta) = r\cos\theta, \\ y = Y(r,\theta) = r\sin\theta, \end{cases}$$

avec $r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Réciproquement, avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on notera $r = R(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et

$$\theta = \Theta(x,y) = \begin{cases} \arctan(y/x), & y \geq 0, x > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & y \geq 0, x = 0, \\ \arctan(y/x) + \pi, & x < 0, \\ \frac{3\pi}{2}, & y < 0, x = 0, \\ \arctan(y/x) + 2\pi, & y < 0, x > 0. \end{cases}$$

Soit $f = f(x,y)$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On définit

$$\tilde{f}(r,\theta) = f(X(r,\theta), Y(r,\theta)),$$

et réciproquement

$$f(x,y) = \tilde{f}(R(x,y), \Theta(x,y)).$$

a) Montrer que si l'on définit $(x,y) = \phi(r,\theta) = (X(r,\theta), Y(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ on a

$$\nabla_{r,\theta}\tilde{f}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(r,\theta) & \frac{\partial}{\partial\theta}\tilde{f}(r,\theta) \end{pmatrix} = \nabla_{x,y} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\nabla_{r,\theta}\phi(r,\theta),$$

où on interpréte les gradients $\nabla_{r,\theta}\tilde{f}$ et $\nabla_{x,y} f$ comme des matrices 1×2 et la jacobienne $\nabla_{r,\theta}\phi$ comme une matrice 2×2.

b) Si on pose $(r,\theta) = \phi^{-1}(x,y) = (R(x,y), \Theta(x,y))$, montrer que

$$\nabla_{x,y} f(x,y) = \nabla_{r,\theta} \tilde{f}(R(x,y), \Theta(x,y)) \nabla_{x,y} \phi^{-1}(x,y).$$

(Pour simplifier la preuve, on supposera $x, y > 0$)

Exercice 8. Révisions - polynômes de Taylor

a) Donner le polynôme de Taylor à l'ordre 1 autour de $(1,2)$ de la fonction $f(x,y) = \ln(4-x-y)$.

b) Donner le polynôme de Taylor à l'ordre 2 autour de $(1,-1)$ de la fonction $f(x,y) = e^{x^2+y^2-y-3}$.

Exercice 9. Matrice symétrique 2×2 (facultatif)

Soit $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

a) Montrer que A est diagonalisable sur les réels, c'est-à-dire que A a toujours 2 valeurs propres réelles.

b) Montrer qu'il existe v_1, v_2 une base de vecteurs propres de A qui est orthonormale, c'est-à-dire $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ et $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. *Indication :* on pourra utiliser l'identité $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle$ vraie pour tout x, y et toute matrice A.

c) Montrer que A est définie positive $\iff$ ses deux valeurs propres sont strictement positives.

Remarque : en remplaçant A par $-A$, on a naturellement le résultat similaire : A est définie négative $\iff$ ses deux valeurs propres sont strictement négative.

Exercice 10. Théorème de Schwarz (facultatif)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^2$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent dans un voisinage de x_0 et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues en x_0. Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0).$$

<u>Indication :</u> Considérer la fonction

$$\Delta(s,t) = f(x_0 + se_1 + te_2) - f(x_0 + se_1) - f(x_0 + te_2) + f(x_0), \quad (s,t) \in [0,1] \times [0,1]$$

et utiliser le théorème des accroissements finis pour calculer $\lim\limits_{s \to 0^+} \dfrac{1}{s^2} \Delta(s,s)$ de deux manières différentes.

Exercice 11. Développement de Taylor à l'ordre 3 (facultatif)

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction que l'on suppose $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, Ω ouvert.
Une astuce pour obtenir la formule du développement de Taylor consiste, pour $x_0, x \in \Omega$ tels que $[x_0, x] \in \Omega$, avec $x = (x_1, x_2)$, $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2})$, à considérer la fonction $g = f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est la courbe paramétrée définie par $\gamma(t) = x_0 + t(x - x_0)$, $t \in \mathbb{R}$ (paramétrisation d'une droite passant par x et x_0). Puisque $f(x) = g(1)$ et $f(x_0) = g(0)$, on considère le développement de Taylor de g à l'ordre n

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) t^k + r_g(t).$$

En évaluant en $t = 1$, on obtient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + r_g(1).$$

On peut montrer que $r_g(1)$ redonne les expressions possibles pour le reste vues en cours et que $r_g(1) = o(\|x - x_0\|^n)$.
Utiliser cette astuce pour calculer le développement de Taylor à l'ordre 3 de f, *i.e.*,

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle H(f)(x_0)(x - x_0), x - x_0 \rangle \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x_1^{3-k} \partial x_2^k} (x_1 - x_{0,1})^{3-k} (x_2 - x_{0,2})^k + o(\|x - x_0\|^3). \end{aligned}$$

Réponses

Exercice 4.

a) Le point $(1,1)$ est un minimum local, le point $(-1,-1)$ est un maximum local, et les points $(1,-1)$ et $(-1,1)$ sont des points selles.

b) Les points $(\pi/2+(2k+1)\pi, 0)$, pour $k \in \mathbb{Z}$ sont des points selles, tandis que les points $(\pi/2+2k\pi, 0)$, pour $k \in \mathbb{Z}$ sont des minimum locaux.

c) Les points $(0,0)$, $(0,-6)$ et $(3,0)$ sont des points selles, le point $(1,-2)$ est un maximum local.

d) Le point $(0,0)$ est le minimum global.

Exercice 5.

a) Le domaine T est un triangle de sommets $(-1,0)$, $(1,0)$ et $(-1,2)$. Il est fermé est borné.

b)
- $\gamma_1(t) = (t,0), \quad t \in [-1,1]$,
- $\gamma_2(t) = (t,1-t), \quad t \in [-1,1]$,
- $\gamma_3(t) = (-1,t), \quad t \in [0,2]$.

c) Un minimum global de valeur -14 est atteint en $(-1,2)$, et un maximum global de valeur 6 est atteint en $(-1,0)$.

Exercice 6.

a) Les ensembles de niveaux sont les cercles de centre $(1,3)$.

b) Le maximum global 0 est atteint en $(1,3)$. Le minimum -4 est atteint pour tout point du bord ∂C de C.

Exercice 8.

a) $p_1(x,y) = -x-y+3$.

b) $p_2(x,y) = 1+2(x-1)-3(y+1)+3(x-1)^2+\frac{11}{2}(y+1)^2-6(x-1)(y+1)$.