

## Exercices – Semaine 6

### Exercice 1.

On considère  $d > 0$ . On considère l'anneau  $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ .

1. Montrer que

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{d}] \cong \mathbb{Z}[t]/(t^2 + d).$$

2. On considère  $N: \mathbb{Z}[i\sqrt{d}] \rightarrow \mathbb{N}$  qui envoie  $a + bi\sqrt{d}$  sur  $a^2 + b^2d$ . Montrez que si  $x \in \mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$  est inversible, alors  $N(x) = 1$ . De cette observation déduisez quels sont les inversibles de cet anneau.
3. Prenons  $d = 5$ . En utilisant la norme  $N$ , montrez que  $2, 3, 1 + i\sqrt{5}, 1 - i\sqrt{5}$  sont irréductibles.
4. Montrer que  $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$  n'est pas factoriel.

### Exercice 2.

On pousse plus loin l'exercice précédent. Soit  $d > 1$ . On note  $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ . On note  $N(a + bi\sqrt{d}) = a^2 + db^2$ .

1. Lister les éléments  $x \in A$  tel que  $N(x) \leq d + 1$ .
2. Montrer que  $i\sqrt{d}, 1 + i\sqrt{d}$  et  $1 - i\sqrt{d}$  sont irréductibles.
3. Si  $d + 1$  n'est pas premier dans  $\mathbb{Z}$ , alors  $A$  n'est pas factoriel.
4. Si  $q = d + 1$  est premier dans  $\mathbb{Z}$  alors celui-ci admet une factorisation unique en irréductibles dans  $A$ .

### Exercice 3.

L'anneau  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ .

1. Montrer que la norme  $N: \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par  $N(a + b\sqrt{5}) = a^2 - 5b^2$  est une fonction multiplicative (donc que  $N(xy) = N(x)N(y)$  – noter que si l'on définit  $\overline{a + b\sqrt{5}} = a - b\sqrt{5}$ , alors  $N(x) = x\bar{x}$ ) et que  $a + b\sqrt{5}$  est inversible si et seulement si  $N(a + b\sqrt{5}) = \pm 1$ .
2. Montrer que  $9 + 4\sqrt{5}$  est inversible et en déduire que  $(\mathbb{Z}[\sqrt{5}])^\times$  est infini.
3. Montrer qu'il n'existe aucun élément de norme 2 ou  $-2$ , si bien que tout élément de norme 4 est irréductible.
4. Trouver deux décompositions de 4 en produit d'irréductibles dans  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ .
5. L'idéal  $(3 + \sqrt{5})$  est-il premier?

### Exercice 4.

On dit qu'un anneau commutatif  $A$  est *Noetherien* si tout idéal de  $A$  admet un nombre fini de générateurs.

1. Montrer qu'un anneau commutatif est Noetherien si et seulement si toute chaîne croissante d'idéaux

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$$

stabilise.

2. En mettant ensemble les définitions et les théorèmes du cours montrer qu'un anneau intègre Noetherien est factoriel si et seulement si tout élément irréductible est premier.
3. Montrer qu'un quotient d'un anneau Noetherien est encore Noetherien.
4. Montrer que les anneaux suivants ne sont pas Noetheriens.

- (a)  $A[x_1, \dots, x_n, \dots]$  l'anneau de polynôme sur  $A$  avec une infinité de variables pour un anneau non-nul  $A$ .
- (b) Les fonctions continues  $C(X, \mathbb{R})$  où  $X$  est un espace topologique compact (=séparé et quasi-compact) infini.

*On pourra prendre une suite convergente avec une infinité de points distincts  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On pourra comprendre comment utiliser le théorème de prolongement de Tietze pour avoir l'existence pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  d'une fonction  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f_n(x_m) = 0$  si  $m \geq n$  et  $f_n(x_m) = 1$  si  $m < n$ . On construira une chaîne infinie d'idéaux qu'on montrera ne pas stabiliser pas à l'aide des fonctions  $f_n$ .*

### Exercice 5.

Soit  $A$  un anneau commutatif Noetherien. Le but de cet exercice est de démontrer que  $A[t]$  est Noetherien également. Soit  $J \subset A[t]$  un idéal. Le but est de montrer qu'il est finiment généré.

On définit pour  $d \in \mathbb{N}$

$$I_d = \{a \in A \mid a \text{ est le coeff. dominant d'un polynôme de degré } d \text{ dans } J\} \cup \{0\}$$

1. Montrer que les  $I_d$  sont des idéaux de  $A$  et que  $I_d \subset I_{d'}$  dès que  $d \leq d'$ .
2. En utilisant que  $A$  est Noetherien, déduire qu'il existe  $d_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $J$  est généré par des polynômes de  $J$  de degré  $\leq d_0$ .
3. Montrer par récurrence sur  $d \in \mathbb{N}$  que les polynômes de degré au plus  $d$  de  $J$  sont générés par un nombre fini d'éléments de  $J$ . Montrer cela en utilisant que chaque  $I_d$  est finiment généré.
4. Conclure.