Leonid Monin
Léo Navarro Chafloque

EPFL, semestre de printemps 2026
Rings and fields

Solutions – Semaine 5

Exercice 1.
Soit A un anneau commutatif. Soit k un corps. On dit qu'un élément $a \in A$ est *idempotent* si $a^2 = a$.

1. Quels sont les idempotents de $k \times k$?
2. Montrez que $e \in A$ est un idempotent si et seulement si $1 - e$ l'est aussi.
3. Soit e un idempotent de A. Montrez que l'application naturelle
$$A \to A/(e) \times A/(1-e)A$$
qui envoie $a \mapsto (\pi_e(a), \pi_{1-e}(a))$ où $\pi_e \colon A \to A/(e)$ et $\pi_{1-e} \colon A \to A/(1-e)$ sont les applications quotients est un isomorphisme.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer tous les idempotents de
$$k[t]/(t^n).$$
Cet anneau est-il isomorphe à un produit d'anneau non-nuls ?

Solution.
Notons en premier lieu que les seuls idempotents d'un anneau intègre sont 0 et 1. En effet si
$$x^2 = x$$
alors
$$x(x-1) = 0.$$
Dans un anneau intègre on conclut que $x = 0, 1$.

1. Il faut que chaque composante soit un idempotent donc on voit qu'on a $(0,1), (1,0), (0,0) = 0, (1,1) = 1$.
2. Si e est idempotent alors $(1-e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - 2e + e = 1 - e$. Cela suffit.
3. Montrons que les hypothèses du théorème chinois des restes s'applique. Premièrement $1 \in (e) + (1-e)$. Aussi, si $\alpha \in (e) \cap (1-e)$ alors $\alpha = ex = (1-e)y$. Donc $e\alpha = e^2x = ex = e(1-e)y = 0$. Cela conclut.
4. Notons que l'image d'un idempotent par un morphisme d'anneau est encore un idempotent. Tout élément de $k[t]/(t^n)$ est de la forme une classe
$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^t.$$
Donc tout élément $x \in k[t]/(t^n)$ est de la forme $x = \lambda + \epsilon$ avec $\lambda \in k$ le terme constant du polynôme et ϵ nilpotent car t est nilpotent.* En effet la somme d'éléments nilpotents est encore nilpotente, ce qu'on voit grâce à la formule du binôme. En effet si a, b sont respectivement

*Dans un anneau A on dit que $a \in A$ est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $a^n = 0$.

nilpotents avec $a^k = 0$ et $a^l = 0$ respectivement alors $(a+n)^{2m+1} = 0$ si $m = max(k,l)$ en dévellopant avec la formule du binôme.

On a le morphisme de réduction modulo t

$$k[t]/(t^n) \to k$$

qui envoie $\lambda + \epsilon \mapsto \lambda$. Dès lors si on suppose que $x = \lambda + \epsilon$ est un idempotent, on voit que $\lambda = 0, 1$. Traitons les deux cas. Si $\lambda = 0$ alors $x = \epsilon$ est idempotent est nilpotent, disons qu'on a $N \in \mathbb{N}$ avec $0 = \epsilon^N = \epsilon$. Maintenant le cas où $\lambda = 1$. Alors $1 - x = 1 - (1 - \epsilon) = \epsilon$ est aussi idempotent, et donc $\epsilon = 0$. Ainsi les seuls idempotents sont $0, 1$.

On voit donc que cet anneau ne peut-être isomorphe à un produit d'anneau non-nuls: un tel produit contient toujours au moins quatres idempotents distincts comme au premier point.

Remarque. Pour le point 4, un principe utile est utilisé: *l'image d'un idempotent est encore un idempotent.* Plus généralement un morphisme d'anneau va toujours préserver des "identités écrite avec $+$ et$\cdot$. Par exemple si un élément satisfait $x^n = 3$ dans un anneau A et qu'on a un morphisme $A \to B$ alors l'image de x satisfait toujouts cette identité.

Exercice 2.
Déterminez quel idéaux sont premiers et ou maximaux dans les cas suivants.

1. $(3, t^3 + 1) \subset \mathbb{Z}[t]$.
2. $(t^3 + t + 1) \subset \mathbb{Z}[t]$.
3. $(3, t^3 + t + 1) \subset \mathbb{Z}[t]$.

Solution.
Notons que le théorème de correspondance se précise de la façon suivante pour les idéaux premiers

$$\{I \subset \mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p} \text{ premier}\} \leftrightarrow \{\mathfrak{q} \subset A/I \mid \mathfrak{q} \text{ premier}\}$$

qui envoie $\mathfrak{p}$ sur $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}/I$. On voit cela car $A/\mathfrak{p} \cong (A/I)/\mathfrak{q}$ par le quotient en deux temps. On rappelle que les idéaux premiers sont exactement les idéaux dont le quotient est intègre.

On peut alors répondre aux questions 1. et 3 en quotientant par 3 d'abord. On cherche donc à determiner si dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[t]$ les idéaux $(t^3 + 1)$ et $(t^3 + t + 1)$ sont premiers. Pour cela on remarque que

$$t^3 + 1 = (t+1)(t^2 - t + 1) \quad t^3 + t + 1 = (t-1)(t^2 + t - 1)$$

où la deuxième égalité utilise $-2 = 1$, valide dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Maitenant $t - 1$ et $t + 1$ sont de degré 1 - s'ils étaient inclus dans les idéaux $(t^3 + 1)$ et $(t^3 + t + 1)$ respectivement on aurait une contradiction sur le degré car un polynôme de degré 3 ne peut diviser un polynôme de degré 1.

Quant au point 2. on affirme que cet idéal est premier. On fait un peu d'analyse en premier lieu. On considère la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui envoie $x \mapsto x^3 + x + 1$. Cette fonction est dérivable étant polynomniale et sa dérivée est donnée par $x \mapsto 3x^2 + 1$. Celle-ci est strictement positive. Dès lors comme la fonction est cubique, on voit que cette fonction s'annule en un unique point à l'ordre 1 (une racine double impliquerait que la dérivée s'annulerait aussi en α mais celle-ci est strictement positive) qu'on note $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarquons maintenant deux choses.

1. $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Supposons que ce soit le cas, et prenons $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z} \setminus 0$ premiers entre eux avec $\alpha = \frac{a}{b}$. Alors

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{a}{b} + 1 = 0.$$

Et donc

$$a(a^2 + b^2) = a^3 + ab^2 = -b^3.$$

Mais comme a, b n'ont aucun facteur premier en commun on voit que $a = \pm 1$. Alors on a

$$b^3 + b^2 + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad b^3 + b^2 - 1 = 0.$$

En réduisant modulo 2 en obtient $0 = 2b + 1 = 1$, dans les deux cas, une contradiction.

2. Il ne peut y avoir de polynôme $g \in \mathbb{Q}[t]$ de degré 2 ou 1 qui annule α. En effet, dans le cas degré 1 on obtiendrait que $\alpha \in \mathbb{Q}$. Dans le cas de degré 2, si c'est le cas en divisant $t^3 + t + 1$ par g dans $\mathbb{Q}[t]$ on obtiendrait un reste de degré 1 ou zéro. Dans le cas où le reste est de degré 1 on obtiendrait un polynôme de degré 1 qui annule α et on revient au cas précédent, ce qui permet d'exclure ce cas. Dans l'autre cas on aurait dans $\mathbb{Q}[t]$ que $t^3 + t + 1$ est produit d'un polynôme de degré 2 et d'un polynôme de degré 1. Mais alors grâce au polynône de degré 1, on aurait un élément $q \in \mathbb{Q}$ qui satisferait $q^3 + q + 1 = 0$ ce qui est exclu par les arguments du premier point.

Fort de ces raisonnements, on affirme maintenant que le noyau de

$$\mathbb{Z}[t] \xrightarrow{\mathrm{ev}_\alpha} \mathbb{R}$$

est $(t^3 + t + 1)$. Pour cela, on prend $f(t)$ dans le noyau est on mène la division euclidienne de $f(t)$ par $t^3 + t + 1$. Comme on a vu qu'il n'est pas possible qu'un polynôme de degré 1 ou de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{Q}$, et a fortiori dans $\mathbb{Z}$, annule α. On déduit que le reste de cette division est forcément nul. Maintenant, on déduit par le théorème d'isomorphisme que $\mathbb{Z}[t]/(t^3 + t + 1)$ est isomorphe à un sous-anneau de $\mathbb{R}$, en particulier intègre. Ainsi on conclut que l'idéal $(t^3 + t + 1)$ est premier.

Exercice 3.
Dans cet exercice, nous étudions les anneaux $\mathbb{Z}[i]/(p)$ pour p un nombre premier. Nous écrirons $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Montrez que $\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{F}_p[t]/(t^2 + 1)$.
   Indication : Utilisez le quotient en deux temps.

2. Pour $p = 5$, montrez que $\mathbb{Z}[i]/(5) \cong \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$.
   Indication : Le théorème des restes chinois peut être utile.

3. Plus généralement montrez que $\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \equiv 1 \mod 4$.
   Indication: Montrez que l'hypothèse est équivalente à l'existence de deux racines carrés disct-intes de -1 dans $\mathbb{F}_p$. Pour une direction, on utilisera que $\mathbb{F}_p^\times$ est un groupe cyclique.[†]

4. Montrez que (p) est premier comme idéal de $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si $p \equiv 2, 3 \mod 4$ et $p \neq 2$.

Solution.

1. On sait que le morphisme $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[i]$ donné par l'évaluation en i induit un isomorphisme $\theta \colon \mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1) \to \mathbb{Z}[i]$. De plus, $p + (x^2 + 1)$ est envoyé sur p par cet isomorphisme, et donc on en déduit un isomorphisme

$$(\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1))/(p + (x^2 + 1)) \cong \mathbb{Z}[i]/(p).$$

Par le théorème du quotient en deux temps appliqué deux fois, on a que

$$(\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1))/(p + (x^2 + 1)) \cong \mathbb{Z}[x]/(p, x^2 + 1) \cong (\mathbb{Z}[x]/(p))/(x^2 + 1 + (p)).$$

[†]Voici une preuve de ce fait. Si ce groupe n'était pas cyclique, par la classification des groupes abéliens de type fini, il existerait $n < p - 1$ tel que $x^n = 1$ pour tout $x \in \mathbb{F}_p^\times$. Mais alors $t^n - 1$ aurait $p - 1$ racines dans $\mathbb{F}_p$ ce qui est absurde.

De plus, il est immédiat que le morphisme $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{F}_p[x]$ induit par la réduction modulo p et envoyant x sur x est surjectif, de noyau $(p) \subseteq \mathbb{Z}[x]$. Il induit donc un isomorphisme $\mathbb{Z}[x]/(p) \cong \mathbb{F}_p[x]$. Comme ce morphisme envoit $x^2+1+(p)$ sur x^2+1, on a donc un isomorphisme induit

$$\mathbb{Z}[x]/(p, x^2+1) \cong (\mathbb{Z}[x]/(p))/(x^2+1+(p)) \cong \mathbb{F}_p[x]/(x^2+1).$$

2. Dans le cas où $p = 5$, on remarque que $[2]_5$ et $[3]_5$ sont des racines de $t^2 + [1]_5 \in \mathbb{F}_5[t]$. En particulier on a la factorisation

$$t^2 + [1]_5 = (t - [2]_5) \cdot (t - [3]_5). \tag{1}$$

Remarquez que $(t-[2]_5)-(t-[3]_5) = [1]_p$. Donc les idéaux générés respectivement par $t-[2]_5$ et par $t-[3]_5$ sont premiers entre eux. Le théorème des restes chinois donne alors

$$\frac{\mathbb{F}_5[t]}{(t-[2]_5) \cap (t-[3]_5)} \cong \frac{\mathbb{F}_5[t]}{(t-[2]_5)} \times \frac{\mathbb{F}_5[t]}{(t-[3]_5)}. \tag{2}$$

L'évaluation en $t = [2]_5$ induit un ismorphisme

$$\mathbb{F}_5 \cong \frac{\mathbb{F}_5[t]}{(t-[2]_5)}$$

et d'une manière similaire on a

$$\mathbb{F}_5 \cong \frac{\mathbb{F}_5[t]}{(t-[3]_5)}.$$

On prétend pour finir que $(t-[2]_5) \cap (t-[3]_5) = (t^2+[1]_5)$. L'inclusion $\supseteq$ est claire, en vue de la factorisation (1). Inversément, prenons un élément $f(t)$ appartenant à l'intersection des deux idéaux. On peut écrire

$$(t-[2])g(t) = f(t) = (t-[3])h(t)$$

pour certains $g(t), h(t) \in \mathbb{F}_5[t]$. Considérons l'image de $f(t)$ par l'évaluation $\mathrm{ev}_{[2]}$ en $t = [2]$. On a

$$\mathrm{ev}_{[2]}(f(t)) = \mathrm{ev}_{[2]}((t-[2])g(t)) = 0$$

d'une part, et

$$\mathrm{ev}_{[2]}(f(t)) = \mathrm{ev}_{[2]}((t-[3])h(t)) = -\,\mathrm{ev}_{[2]}(h(t))$$

d'autre part. Ainsi $\mathrm{ev}_{[2]}(h(t)) = 0$, et puisque $\ker \mathrm{ev}_{[2]} = (t-[2])$ on en déduit que $h(t) = (t-[2])j(t)$ pour un certain $j(t) \in \mathbb{F}_5[t]$. On peut ainsi écrire

$$f(t) = (t-[3])(t-[2])j(t) = (t^2+[1])j(t)$$

ce qui montre que $f(t) \in (t^2+[1])$.

En combinant tout cela dans (2), on obtient

$$\frac{\mathbb{F}_5[t]}{(t^2+[1])} \cong \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5,$$

ce qui implique que $\mathbb{Z}[i]/(5) \cong \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$ en vue du point précédent.

3. Montrons tout d'abord que 4 divise $p-1$ (i.e. $p \equiv 1 \mod 4$) si et seulement si -1 possède deux racines distinctes modulo p.

Tout d'abord, aucun des deux côtés de l'équivalence n'est satisfait si $p = 2$, donc supposons que $p \neq 2$. Dans ce cas, il suffit de montrer que 4 divise $p-1$ si et seulement si -1 est un carré modulo p (si $a \in \mathbb{F}_p$ satisfait $a^2 = -1$, alors $-a$ aussi et vu que $p \neq 2$, il y a automatiquement deux racines carrés de -1).

Supposons tout d'abord qu' il existe $a \in \mathbb{F}_p$ tel que $a^2 = -1$. Vu que $p \neq 2$, a est donc un élément d'ordre 4 dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{F}_p^\times, \cdot)$, qui est d'ordre $p-1$. Ainsi, 4 divise $p-1$ par le théorème de Lagrange.

Si 4 divise $p-1$, alors comme $(\mathbb{F}_p^\times, \times)$ est cyclique, de générateur disons α, on voit que $\alpha^{\frac{p-1}{4}}$ est d'ordre 4.

Maintenant montrons que $\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ si et seulement si -1 possède deux racines distinctes modulo p.

Si -1 possède deux racines distinctes dans $\mathbb{F}_p$, disons α_1, α_2, alors $t^2+1 = (t-\alpha_1)(t-\alpha_2)$ et donc comme $\alpha_1 \neq \alpha_2$ on peut utiliser le théorème des restes chinois pour obtenir que

$$\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{F}_p[t]/(t^2+1) = \mathbb{F}_p[t]/(t-\alpha_1)(t-\alpha_2) \cong \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p.$$

Réciproquement si

$$\mathbb{F}_p[t]/(t^2+1) \cong \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p,$$

notons (α_1, α_2) l'image de t par cet isomorphisme. Comme $t^2 = -1$ dans l'anneau de gauche, on voit que $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = -1$. Il reste à démontrer que $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Supposons par l'absurde que ce soit le cas, et que ces éléments soient égaux à un $\lambda \in \mathbb{F}_p$. Mais alors $t - \lambda$ serait dans le noyau de la composition

$$\mathbb{F}[t] \to \mathbb{F}_p[t]/(t^2+1) \cong \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$$

et donc inclus dans (t^2+1) comme le deuxième morphisme est un isomorphisme. Mais cela est absurde car un polynôme de degré 2 ne peut diviser un polynôme de degré 1.

4. Si $p \equiv 1 \mod 4$ ou égal à 2, on voit que l'idéal n'est pas premier. En effet dans le premier cas c'est grâce au point précédent: un produit d'anneau non-nuls n'est jamais intègre. Pour $p = 2$, on a $\mathbb{Z}[i]/(2) \cong \mathbb{F}_2[t]/(t^2+1) = \mathbb{F}[t]/(t+1)^2$. Cet anneau n'est pas intègre car $t+1$ est non-nul et nul au carré.

   Pour l'autre direction si $p \equiv 2, 3 \mod 4$ et $p \neq 2$, on veut montrer que (p) est premier. L'hypothèse sur p est équivalente au fait que -1 n'a pas de racine carrée dans $\mathbb{F}_p$.

   On veut donc montrer que (t^2+1) est premier dans $\mathbb{F}_p[t]$.[‡] Soit $at+b \in \mathbb{F}_p[t]/(t^2+1)$ un élément non-nul. Il suffit de montrer que la multiplication par cet élément est injective, cela donnerait l'intégrité. Un élément du noyau est un $ct+d$ tel que

$$(at+b)(ct+d) = 0 \in \mathbb{F}_p[t]/(t^2+1).$$

   En relevant cela à $\mathbb{F}_p[t]$ on a

$$(at+b)(ct+d) = (t^2+1)f(t)$$

   pour un polynôme $f(t) \in \mathbb{F}_p[t]$. En terme de degré, on voit que nécessairement $a, c \neq 0$ et que $\deg(f(t)) = 0$. Mais alors on déduit que $-b/a$ est un zéro de t^2+1 une contradiction car cela impliquerait que -1 aurait une racine carrée dans $\mathbb{F}_p$ une contradiction.

Exercice 4.
Soit un anneau commutatif A avec $2 \in A^\times$. Montrez qu'il existe un isomorphisme de A-algèbres (cela signifie que les constantes de $a \in A[t]$ sont envoyées sur les éléments diagonaux (a, a) de $A \times A$)

$$A[t]/(t^2-1) \cong A \times A.$$

Si $2 \notin A^\times$, alors montrez qu'un tel isomorphisme ne peux exister.

[‡]La preuve ci-dessous montre en fait que idéal est maximal. Voir l'exercice sur les algèbres intègres de dimension finie sur un corps.

Solution. Comme
$$t-1-(t+1)=-2$$
le premier point est une conséquence du théorème des restes chinois. Pour le deuxième point, on prend $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A avec $2 \in \mathfrak{m}$ par le théorème de Krull. On considère l'idéal généré par $\mathfrak{m}$ vu comme constante et comme éléments diagonaux respectivement dans $A[t]/(t^2-1)$ et $A \times A$. Si on suppose qu'il existe un isomorphisme de A-algèbres entre ces deux anneaux, ces deux idéaux vont coïncider par cet isomorphisme et donc induire un isomorphisme
$$(A/\mathfrak{m})[t]/(t^2-1) \to A/\mathfrak{m} \times A/\mathfrak{m}.$$
Mais $A/\mathfrak{m}$ est un corps de caractéristique 2, donc $(t^2-1)=(t-1)^2$. Mais alors le dernier point de l'exercice 1 amène à une contradiction.

Remarque. Dans la deuxième partie de cette exercice on utilise un principe fondamental qui est que tout élément non inversible est inclus dans un idéal maximal. Ensuite on utilise un principe un peu plus avancé: si on a un isomorphisme entre objets "au-dessus de A" (par cette phrase plus intuitive on évoque plus précisément un isomorphisme de A-algèbres) alors on aura un isomorphisme après "changement de base" à $A/\mathfrak{m}$. Une manière d'exprimer cela de manière concise est de dire qu'on a un foncteur des A-algèbres vers les $A/\mathfrak{m}$-algèbres et que tout foncteur préserve les isomorphismes.

Une manière d'aborder la deuxième partie de l'exercice si on ne sait pas comment commencer et de prendre des exemples de A avec $2 \notin A^\times$. On peut commencer par les exemples les plus "extrêmes" c'est à dire les corps où $2=0$. Ici on voit pourquoi l'énoncé est faux. Ensuite, on essaie de s'y ramener.

Exercice 5.
Soit A un anneau commutatif. On note $\mathrm{nil}(A)$ pour les éléments nilpotents de A. Soit k un corps.

1. Déterminer $\mathrm{nil}(A)$, où $A = k[x,y]\big/(x^2y^3)$.
2. Écrire $\mathrm{nil}(A)$ comme l'intersection d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_m$, $\mathrm{nil}(A)=\cap_{i=1}^m \mathfrak{p}_i$, pour m minimal.
3. Déterminer les premiers minimaux de A.

Solution.

1. Soit $f(x,y) \in k[x,y]/(x^2y^3)$ nilpotent. On écrit $f(x,y) = xyh_1(x,y) + xh_2(x) + yh_2(y) + \lambda$, avec $\lambda \in k$. Comme xy est nilpotent, il suit que $xh_2(x)+yh_2(y)+\lambda$ est nilpotent. Comme l'image dans le quotient par (x) et (y) dans $k[y]$ et $k[x]$ respectivement est encore nilpotente et que ces anneaux sont intègres, il suit que $h_2(x)=h_2(y)=\lambda=0$. Dès lors on conclut que $\mathrm{nil}(A)=(xy)$.

   On peut aussi utiliser que les éléments nilpotents sont l'intersection de tous les premiers (Théorème mentionné dans les notes du cours). Comme (x) et (y) sont premiers, on a $\mathrm{nil}(A) \subset (x)\cap(y) = (xy)$. *Comme l'autre inclusion est également vérifiée, on a égalité.*

2. Notons que $(x)\cap(y)=(xy)$. En effet si $f(x,y) \in (x)\cap(y)$ alors $f(x,y) = xh_1(x,y) = yh_2(x,y)$. Comme (x) est un idéal premier, et que $y \notin (x)$ il suit que $h_2(x,y) \in (x)$, et donc que $f(x,y) \in (xy)$. Dès lors $\mathrm{nil}(A) = (x)\cap(y)$. Cette intersection est bien minimale, en effet sinon $\mathrm{nil}(A)$ serait premier. Mais $x,y \notin \mathrm{nil}(A)$ et $xy \in \mathrm{nil}(A)$.

3. Si $\mathfrak{p}$ est un premier qui contient x^2y^3, alors x ou y appartient à $\mathfrak{p}$ comme cet idéal est premier. Ainsi (x) ou (y) est inclus dans $\mathfrak{p}$. Comme ces idéaux sont premiers on conclut que ces premiers sont minimaux. En effet, en utilisant le raisonnement précédent si $\mathfrak{p} \subset (x)$, alors soit $(y) \subset \mathfrak{p} \subset (x)$ ou $(x)\mathfrak{p} \subset (x)$. Dans le deuxième cas, on a $\mathfrak{p}=(x)$. Notez que le premier cas est impossible car $y \notin (x)$. Ainsi (x) est minimal. Un raisonnement symétrique pour y s'applique.