

Exercice 1. Pour s'échauffer - Hessienne

Pour chaque fonction ci-dessous calculer la matrice hessienne :

a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{xy}$.

b) $f(x, y) = \cos(xy + x)$.

Indication : on pourra s'aider du fait que les fonctions sont $C^2(\mathbb{R}^2)$.

Correction.

a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (2 + 4xy)e^{xy} + (x^2 + y^2)y^2 e^{xy}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = (2 + 4xy)e^{xy} + (x^2 + y^2)x^2 e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = (3 + xy)(x^2 + y^2)e^{xy}$$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\cos(xy + x)(y + 1)^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\cos(xy + x)x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\cos(xy + x)(y + 1)x - \sin(xy + x)$$

Exercice 2. Développement de Taylor

Donner le polynôme de Taylor d'ordre 2 des fonctions ci-dessous autour de (x_0, y_0) .

a) $f(x, y) = \sin(3 + 3y + xy + y^2)$, $(x_0, y_0) = (1, -1)$

b) $f(x, y) = e^{3+2x+x^2+y}$, $(x_0, y_0) = (-1, -2)$.

c) $f(x, y) = \frac{1}{3 - x - 2y - xy}$, $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

d) $f(x, y) = \ln(x + x^2y)$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Correction.

a) *Méthode 1* : Formule.

On a

$$f(x, y) = \sin(3 + 3y + xy + y^2)$$

$$f(1, -1) = \sin(3 - 3 - 1 + 1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos(3 + 3y + xy + y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = -1 \cos(0) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (3 + x + 2y) \cos(3 + 3y + xy + y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = 2 \cos(0) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -y^2 \sin(3 + 3y + xy + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \cos(3 + 3y + xy + y^2)$$

$$-y(3 + x + 2y) \sin(3 + 3y + xy + y^2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, -1) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \cos(3 + 3y + xy + y^2)$$

$$-(3 + x + 2y)^2 \sin(3 + 3y + xy + y^2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -1) = 2$$

Donc,

$$\begin{aligned} p_2(x, y) &= 0 - (x - 1) + 2(y + 1) + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot (x - 1)^2 + \frac{1}{1! 1!} \cdot 1 \cdot (x - 1)(y + 1) + \frac{1}{2!} \cdot 2 \cdot (y + 1)^2 \\ &= -(x - 1) + 2(y + 1) + (x - 1)(y + 1) + (y + 1)^2 \end{aligned}$$

Méthode 2 : Composition de fonctions.

$f(x, y) = \varphi(g(x, y))$, avec

$$g(x, y) = 3 + 3y + xy + y^2$$

à développer autour de $(1, -1)$

$$\varphi(z) = \sin(z)$$

à développer autour de $g(1, -1) = 0$

φ a un développement limité (DL) connu :

$$p_2^\varphi(z) = z$$

Pour g vu qu'il s'agit d'un polynôme, on a deux options :

Formule pour g :

$$g(x, y) = 3 + 3y + xy + y^2$$

$$g(1, -1) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = y$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, -1) = -1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 3 + x + 2y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(1, -1) = 2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1, -1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1, -1) = 1$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1, -1) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1, -1) = 2$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p_2^g(x, y) &= 0 - (x - 1) + 2(y + 1) + \frac{1}{2!} 0(x - 1)^2 + \frac{1}{1! 1!} \cdot 1 \cdot (x - 1)(y + 1) + \frac{1}{2!} \cdot 2 \cdot (y + 1)^2 \\ &= - (x - 1) + 2(y + 1) + (x - 1)(y + 1) + (y + 1)^2 \end{aligned}$$

Feintes du Loup pour g

On a

$$\begin{aligned} g(x, y) &= 3 + 3y + xy + y^2 \\ &= 3 + 3(y + 1 - 1) + (x - 1 + 1)(y + 1 - 1) + (y + 1 - 1)^2 \\ &= 3 + 3(y + 1) - 3 + (x - 1)(y + 1) - (x - 1) + (y + 1) - 1 + (y + 1)^2 - 2(y + 1) + 1 \\ &= - (x - 1) + 2(y + 1) + (x - 1)(y + 1) + (y + 1)^2. \end{aligned}$$

Vu que tous les termes sont de degré 2 ou moins, on garde tout et

$$p_2^g(x, y) = - (x - 1) + 2(y + 1) + (x - 1)(y + 1) + (y + 1)^2.$$

Pour finir,

$$p_2^\varphi(p_2^g(x, y)) = - (x - 1) + 2(y + 1) + (x - 1)(y + 1) + (y + 1)^2,$$

vu que tous les termes sont de degrés 2 ou moins, il n'y a rien à enlever et c'est le polynôme de Taylor de f :

$$p_2(x, y) = - (x - 1) + 2(y + 1) + (x - 1)(y + 1) + (y + 1)^2$$

b) *Méthode 1* : Formule.

On a

$$f(x, y) = e^{3+2x+x^2+y} \qquad f(-1, -2) = e^{3-2+1-2} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= (2 + 2x)e^{3+2x+x^2+y} & \frac{\partial f}{\partial x}(-1, -2) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= e^{3+2x+x^2+y} & \frac{\partial f}{\partial y}(-1, -2) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 2e^{3+2x+x^2+y} \\ &+ (2 + 2x)^2 e^{3+2x+x^2+y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -2) &= 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 2(1 + x)e^{3+2x+x^2+y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, -2) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= e^{3+2x+x^2+y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -2) &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p_2(x, y) &= 1 + 0 \cdot (x + 1) + 1 \cdot (y + 2) + \frac{1}{2!} \cdot 2 \cdot (x + 1)^2 + \frac{1}{1! 1!} \cdot 0 \cdot (x + 1)(y + 2) + \frac{1}{2!} \cdot 1 \cdot (y + 2)^2 \\ &= 1 + (y + 2) + (x + 1)^2 + \frac{1}{2}(y + 2)^2 \end{aligned}$$

Méthode 2 : Composition

$f(x, y) = \varphi(g(x, y))$ avec

$$g(x, y) = 3 + 2x + x^2 + y$$

$$\varphi(z) = e^z$$

à développer autour de $(-1, -2)$

à développer autour de $g(-1, -2) = 0$

φ est un DL connu :

$$p_2^\varphi(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2$$

Pour g , vu qu'il s'agit d'un polynôme, on a deux possibilités :

Formule pour g

On a

$$g(x, y) = 3 + 2x + x^2 + y$$

$$g(-1, -2) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2 + 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(-1, -2) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(-1, -2) = 1$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(-1, -2) = 2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(-1, -2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(-1, -2) = 0$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p_2^g(x, y) &= 0 + 0 \cdot (x + 1) + 1 \cdot (y + 2) + \frac{1}{2!} \cdot 2 \cdot (x + 1)^2 + \frac{1}{1!} \frac{1}{1!} \cdot 0 \cdot (x + 1)(x + 2) + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot (y + 2)^2 \\ &= (y + 2) + (x + 1)^2 \end{aligned}$$

Feintes du Loup pour g

On a

$$g(x, y) = 3 + 2x + x^2 + y$$

$$= 3 + 2(x + 1 - 1) + (x + 1 - 1)^2 + (y + 2 - 2)$$

$$= 3 + 2(x + 1) - 2 + (x + 1)^2 - 2(x - 1) + 1 + (y + 2) - 2$$

$$= (y + 2) + (x + 1)^2$$

Vu que tous les termes sont de degré 2 ou moins, on garde tout et

$$p_2^g(x, y) = (y + 2) + (x + 1)^2$$

Pour finir,

$$\begin{aligned} p_2^\varphi(p_2^g(x, y)) &= 1 + (y + 2) + (x + 1)^2 + \frac{1}{2} ((y + 2) + (x + 1)^2)^2 \\ &= 1 + (y + 2) + (x + 1)^2 + \frac{1}{2}(y + 2)^2 + \underbrace{(y + 2)(x + 1)^2}_{\text{degré 3}} + \underbrace{\frac{1}{2}(x + 1)^4}_{\text{degré 4}} \end{aligned}$$

En enlevant les termes de degré trop haut, on obtient

$$p_2(x, y) = 1 + (y + 2) + (x + 1)^2 + \frac{1}{2}(y + 2)^2$$

c) *Méthode 1* : Formule

On a

$$f(x, y) = \frac{1}{3 - x - 2y - xy} \qquad f(2, 0) = \frac{1}{3 - 2 - 0 - 0} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = - \frac{-1 - y}{(3 - x - 2y - xy)^2}$$

$$= \frac{1 + y}{(3 - x - 2y - xy)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2 + x}{(3 - x - 2y - xy)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \frac{(1 + y)^2}{(3 - x - 2y - xy)^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 0) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{1}{(3 - x - 2y - xy)^2} + \frac{2(1 + y)(2 + x)}{(3 - x - 2y - xy)^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 0) = 1 + 8 = 9$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \frac{(2 + x)^2}{(3 - x - 2y - xy)^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 0) = 32$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p_2(x, y) &= 1 + 1 \cdot (x - 2) + 4 \cdot (y - 0) + \frac{1}{2!} \cdot 2 \cdot (x - 2)^2 + \frac{1}{1!} \frac{1}{1!} \cdot 9 \cdot (x - 2)(y - 0) + \frac{1}{2!} \cdot 32 \cdot (y - 0)^2 \\ &= 1 + (x - 2) + 4y + (x - 2)^2 + 9(x - 2)y + 16y^2. \end{aligned}$$

Méthode 2 : Composition

$f(x, y) = \varphi(g(x, y))$ avec

$$g(x, y) = -2 + x + 2y + xy \quad \text{à développer autour de } (2, 0)$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{1 - z} \quad \text{à développer autour de } g(2, 0) = 0.$$

(Remarque : $g(x, y) = 2 - x - 2y - xy$ et $\varphi(z) = \frac{1}{1+z}$ fonctionne aussi.)

φ est un DL connu :

$$p_2^\varphi(z) = 1 + z + z^2.$$

Vu que g est un polynôme, on a deux options :

Formule pour g :

On a

$$g(x, y) = -2 + x + 2y + xy \qquad g(2, 0) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 1 + y \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(2, 0) = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2 + x \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(2, 0) = 4$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(2, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = 1 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(2, 0) = 1$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(2, 0) = 0$$

et donc,

$$\begin{aligned} p_2^g(x, y) &= 0 + 1 \cdot (x - 2) + 4 \cdot (y - 0) + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot (x - 1)^2 + \frac{1}{1!} \frac{1}{1!} \cdot 1 \cdot (x - 2)(y - 0) + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot (y - 0)^2 \\ &= (x - 1) + 4y + (x - 2)y \end{aligned}$$

Feintes du Loup pour g

On a

$$\begin{aligned} g(x, y) &= -2 + x + 2y + xy \\ &= -2 + (x - 2 + 2) + 2y + (x - 2 + 2)y \\ &= (x - 2) + 4y + (x - 2)y \end{aligned}$$

Vu que tous les termes sont de degré 2 ou moins, on garde tout et

$$p_2^g(x, y) = (x - 2) + 4y + (x - 2)y.$$

Pour finir

$$\begin{aligned} p_2^{\mathcal{C}}(p_2^g(x, y)) &= 1 + (x - 2) + 4y + (x - 2)y + ((x - 2) + 4y + (x - 2)y)^2 \\ &= 1 + (x - 2) + 4y + (x - 2)y \\ &\quad + (x - 2)^2 + 16y^2 + \underbrace{(x - 2)^2 y^2}_{\text{degré 4}} + 8(x - 2)y + \underbrace{2(x - 2)^2 y}_{\text{degré 3}} + \underbrace{8(x - 2)y^2}_{\text{degré 3}} \end{aligned}$$

En ne gardant que les termes de degré 2 ou moins, on obtient

$$p_2(x, y) = 1 + (x - 2) + 4y + (x - 2)^2 + 9(x - 2)y + 16y^2$$

d) *Méthode 1* : Formule.

On a

$$f(x, y) = \log(x + x^2y)$$

$$\log(1, 0) = \log(1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1 + 2xy}{x + x^2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2}{x + x^2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2y}{x + x^2y}$$

$$- \frac{(1 + 2xy)^2}{(x + x^2y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{2x}{x + x^2y}$$

$$- \frac{(1 + 2xy)x^2}{(x + x^2y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = - \frac{x^4}{(x + x^2y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) = -1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p_2(x, y) &= 0 + 1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \cdot (-1) \cdot (x - 1)^2 + \frac{1}{1!} \frac{1}{1!} (x - 1)(y - 1) + \frac{1}{2!} \cdot (-1) \cdot (y - 0)^2 \\ &= (x - 1) + y - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + (x - 1)y - \frac{1}{2}y^2 \end{aligned}$$

Méthode 2 : Composition

$f(x, y) = \varphi(g(x, y))$, avec

$$g(x, y) = -1 + x + x^2y$$

à développer autour de $(1, 0)$

$$\varphi(z) = \log(1 + z)$$

à développer autour de $g(1, 0) = 0$.

φ est un DL connu :

$$p_2^\varphi(z) = z - \frac{z^2}{2}.$$

Pour g , vu qu'il s'agit d'un polynôme, on a deux options :

Formule pour g .

On a

$$g(x, y) = -1 + x + x^2y \qquad g(1, 0) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 1 + 2xy \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(1, 0) = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x^2 \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0) = 1$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = 2y \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1, 0) = 2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1, 0) = 0$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p_2^g(x, y) &= 1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 0) + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot (x - 1)^2 + \frac{1}{1!1!} \cdot 2 \cdot (x - 1)(y - 0) + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot (y - 0)^2 \\ &= (x - 1) + y + 2(x - 1)y \end{aligned}$$

Feinte du Loup pour g

On a

$$\begin{aligned} g(x, y) &= -1 + x + x^2y \\ &= -1 + (x - 1 + 1) + (x - 1 + 1)^2y \\ &= (x - 1) + \underbrace{(x - 1)^2y}_{\text{degré 3}} + 2(x - 1)y + y \end{aligned}$$

En ne gardant que les termes de degré 2 ou moins, on obtient

$$p_2^g(x, y) = (x - 1) + y + 2(x - 1)y.$$

Composition

Pour finir, on a

$$\begin{aligned} p_2^{\mathcal{L}}(p_2^g(x, y)) &= (x - 1) + y + 2(x - 1)y - \frac{1}{2} ((x - 1) + y + 2(x - 1)y)^2 \\ &= (x - 1) + y + 2(x - 1)y \\ &\quad - \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2(x - 1)^2y^2 - (x - 1)y - 2(x - 1)^2y - 2(x - 1)y^2 \\ &= (x - 1) + y - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + (x - 1)y - \frac{1}{2}y^2 - \underbrace{2(x - 1)^2y}_{\text{degré 3}} - \underbrace{2(x - 1)y^2}_{\text{degré 3}} - \underbrace{2(x - 1)^2y^2}_{\text{degré 4}}. \end{aligned}$$

En ne gardant que les termes de degré 2 ou moins, on obtient

$$p_2(x, y) = (x - 1) + y - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + (x - 1)y - \frac{1}{2}y^2$$

Exercice 3. Règle de la chaîne

a) Soient les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(t) = e^t$ et $g(x, y) = \|(x, y)\|$. Calculer $\nabla g(x, y)$ et $\nabla(f \circ g)(x, y)$

b) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x, y) = (-y, x, x + y)$. Donner la matrice jacobienne de f .

c) Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ données par

$$f(x, y) = (-y, x, xy)$$

$$g(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 2z, x^2 + y^2 + 2z)$$

Donner l'expression de la composition $h = g \circ f$ et calculer la matrice jacobienne de h .

d) Soient $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ données par

$$f(x, y, z) = (e^{y+2x}, x^2 + yz)$$

$$g(x, y) = (\cos x, \sin y)$$

Donner l'expression de la composition $h = g \circ f$ et calculer sa matrice jacobienne.

Correction.

a) On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \|(x, y)\| = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\|(x, y)\|} \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{y}{\|(x, y)\|} \\ \frac{\partial f \circ g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} e^{\|(x, y)\|} = e^{\|(x, y)\|} \frac{x}{\|(x, y)\|} \\ \frac{\partial f \circ g}{\partial y}(x, y) &= e^{\|(x, y)\|} \frac{y}{\|(x, y)\|} \end{aligned}$$

Remarque : on calcule très rapidement les dérivées partielles de $f \circ g$ à l'aide des formules de dérivation de fonctions composées

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x}(x, y) = \frac{df}{dt}(g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

et

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial y}(x, y) = \frac{df}{dt}(g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

b) On peut calculer la jacobienne de $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$ comme :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x, y) \\ \nabla f_2(x, y) \\ \nabla f_3(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) On a $h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y)) = (y^2 + x^2 - 2xy, x^2 + y^2 + 2xy)$ et on calcule

$$\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla h_1(x, y) \\ \nabla h_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y & 2y - 2x \\ 2x + 2y & 2y + 2x \end{pmatrix}.$$

d) On a $h(x, y, z) = (h_1(x, y, z), h_2(x, y, z)) = (\cos(e^{y+2x}), \sin(x^2 + yz))$ et la jacobien

$$\nabla h(x, y, z) = \begin{pmatrix} \nabla h_1(x, y, z) \\ \nabla h_2(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(e^{y+2x})e^{y+2x} & -\sin(e^{y+2x})e^{y+2x} & 0 \\ \cos(x^2 + yz)2x & \cos(x^2 + yz)z & \cos(x^2 + yz)y \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Règle de la chaîne

Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$. On considère la courbe paramétrée suivante $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (e^{-t} \cos(2\pi t), e^{-t} \sin(2\pi t))$$

a) Calculer la dérivée de la fonction $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

b) Répéter le point précédent en utilisant la courbe:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

Pourquoi la valeur de la dérivée est-elle 0? Penser aux ensembles de niveaux de f et à la formule de dérivation de fonctions composées :

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \frac{dy}{dt}(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle.$$

Correction.

a) On a $(f \circ \gamma)(t) = x^2(t) + y^2(t) = e^{-2t}$. D'où $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = -2e^{-2t}$.

b) On a $(f \circ \gamma)(t) = x^2(t) + y^2(t) = 1$ d'où $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0$. Or, on sait que les ensembles de niveaux de la fonction f sont des cercles centrés en l'origine. Le gradient de f étant toujours orthogonal aux ensembles de niveaux on a

$$\langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0.$$

Exercice 5. Règle de la chaîne

a) On donne la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1, x_2) = (x_2^2, x_1 - x_2)$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\nabla g(y_1, y_2) = (-y_2 \sin(y_1), \cos(y_1) + 2y_2)$. On considère la composition $h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Calculer $\nabla h(1, 0)$.

b) On donne la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x_1, x_2) = (-x_1(1 - 2x_2), x_1^2(1 - x_2), x_1 x_2)$ et une fonction $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$. On considère la composition $h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Alors

$$\square \frac{\partial h}{\partial x_2}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(-1, 1, 0) - 2 \frac{\partial g}{\partial y_2}(-1, 1, 0) + \frac{\partial g}{\partial y_3}(-1, 1, 0)$$

$$\square \frac{\partial h}{\partial x_2}(1, 0) = 2 \frac{\partial g}{\partial y_1}(1, 0, 0) - 2 \frac{\partial g}{\partial y_2}(1, 0, 0) + \frac{\partial g}{\partial y_3}(1, 0, 0)$$

$$\square \frac{\partial h}{\partial x_2}(1, 0) = 2 \frac{\partial g}{\partial y_1}(-1, 1, 0) - \frac{\partial g}{\partial y_2}(-1, 1, 0) + \frac{\partial g}{\partial y_3}(-1, 1, 0)$$

$$\square \frac{\partial h}{\partial x_2}(1, 0) = -\frac{\partial g}{\partial y_1}(-1, 1, 0) + 2 \frac{\partial g}{\partial y_2}(-1, 1, 0)$$

Correction.

a) Notons $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ et calculons également $f(1, 0) = (0, 1)$ En utilisant la formule de dérivation en chaîne on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_1}(1, 0) &= \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(1, 0)) \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(1, 0)) \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(1, 0) \\ &= \frac{\partial g}{\partial y_1}(0, 1) \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(0, 1) \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(1, 0) = (-1 \sin(0)) \cdot 0 + (\cos(0) + 2 \cdot 1) \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_2}(1, 0) &= \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(1, 0)) \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(1, 0)) \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(1, 0) \\ &= \frac{\partial g}{\partial y_1}(0, 1) \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(0, 1) \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(1, 0) = (-1 \sin(0)) \cdot 2 \cdot 1 + (\cos(0) + 2 \cdot 1) \cdot (-1) = -3. \end{aligned}$$

b) Notons $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2))$. On commence par écrire la formule de dérivation de fonctions composées pour $h = g \circ f$ au point $f(1, 0)$:

$$\frac{\partial h}{\partial x_2}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(1, 0)) \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(1, 0)) \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial y_3}(f(1, 0)) \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(1, 0).$$

On calcule $f(1, 0) = (-1, 1, 0)$ et

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -x_1^2, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1$$

d'où

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(1, 0) = 2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(1, 0) = -1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(1, 0) = 1$$

et donc la bonne réponse est

$$\blacksquare \quad \frac{\partial h}{\partial x_2}(1, 0) = 2 \frac{\partial g}{\partial y_1}(-1, 1, 0) - \frac{\partial g}{\partial y_2}(-1, 1, 0) + \frac{\partial g}{\partial y_3}(-1, 1, 0).$$

Exercice 6. Révisions plan tangent

Pour les fonctions $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et les points $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ donnés ci-dessous, donner l'équation du plan tangent au graphe de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

a) $f(x, y) = x - y - x^2 + y^3$, $(x_0, y_0) = (-2, 1)$.

b) $f(x, y) = 5 - x^2 - \sin(xy)$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

c) $f(x, y) = \tan(x^2 + y)$, $(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, 0\right)$.

Correction.

a) On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 1 - 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 3y^2 - 1 \quad \Rightarrow \nabla f(-2, 1) = (5, 2) \end{aligned}$$

et donc l'équation du plan tangent est

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle \\ &= -6 + \langle (5, 2), (x + 2, y - 1) \rangle \\ &= -6 + 5x + 10 + 2y - 2 \\ &= 2 + 5x + 2y \end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -2x - y \cos(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -x \cos(xy) \quad \Rightarrow \nabla f(1, 0) = (-2, -1). \end{aligned}$$

et donc l'équation du plan tangent est

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle \\ &= 4 + \langle (-2, -1), (x - 1, y) \rangle \\ &= 4 - 2x + 2 - y \\ &= -2x - y + 6 \end{aligned}$$

c) On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x}{\cos^2(x^2 + y)} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{\cos^2(x^2 + y)} \quad \Rightarrow \nabla f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, 0\right) = (2\sqrt{\pi}, 2)\end{aligned}$$

et donc l'équation du plan tangent est

$$\begin{aligned}z &= f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle \\ &= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left\langle (2\sqrt{\pi}, 2), \left(x - \frac{\sqrt{\pi}}{2}, y\right) \right\rangle \\ &= 2\sqrt{\pi}x + 2y + 1 - \pi\end{aligned}$$

Exercice 7. Révision - gradient et direction de croissance maximale

On considère la fonction

$$f(x, y) = 2(x - 1)^2 + y^2.$$

- Dans quelle direction à partir de $(2, 3, f(2, 3))$ la pente du graphe de f est-elle maximale ? Donner la valeur de la pente.
- Quelle direction à partir $(2, 3, f(2, 3))$ doit-on suivre pour se trouver sur un ensemble de niveau ?
- Si on se dirige à partir du point $(2, 3, f(2, 3))$ selon la direction "en vue de haut" $v = (1, 1)$, que vaut la valeur de la pente ?

Correction.

- On sait que le gradient de f pointe en direction de la pente maximale. On a $\nabla f(x, y) = (4(x - 1), 2y)$ et donc depuis le point $(2, 3, f(2, 3))$, la pente maximale est dans la direction "vue de haut" $\nabla f(2, 3) = (4, 6)$. La pente vaut $\|\nabla f(2, 3)\| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$
- Le gradient étant orthogonal au courbe de niveau, pour suivre une courbe de niveau il faut donc se diriger "en vue de haut" selon la direction orthogonale au gradient, à savoir $(-6, 4)$.
- La valeur de la pente p est donné par la dérivée directionnelle dans la direction $v = (1, 1)$:

$$p = \frac{1}{\|v\|} \frac{\partial f}{\partial v}(2, 3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \nabla f(2, 3), (1, 1) \rangle = \frac{10}{\sqrt{2}}.$$