

Exercice 1. Pour s'échauffer - Hessienne

Pour chaque fonction ci-dessous calculer la matrice hessienne :

a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{xy}$.

b) $f(x, y) = \cos(xy + x)$.

Indication : on pourra s'aider du fait que les fonctions sont $C^2(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 2. Développement de Taylor

Donner le polynôme de Taylor d'ordre 2 des fonctions ci-dessous autour de (x_0, y_0) .

a) $f(x, y) = \sin(3 + 3y + xy + y^2)$, $(x_0, y_0) = (1, -1)$

b) $f(x, y) = e^{3+2x+x^2+y}$, $(x_0, y_0) = (-1, -2)$.

c) $f(x, y) = \frac{1}{3 - x - 2y - xy}$, $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

d) $f(x, y) = \ln(x + x^2y)$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Exercice 3. Règle de la chaîne

a) Soient les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(t) = e^t$ et $g(x, y) = \|(x, y)\|$. Calculer $\nabla g(x, y)$ et $\nabla(f \circ g)(x, y)$

b) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x, y) = (-y, x, x + y)$. Donner la matrice jacobienne de f .

c) Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ données par

$$f(x, y) = (-y, x, xy)$$

$$g(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 2z, x^2 + y^2 + 2z)$$

Donner l'expression de la composition $h = g \circ f$ et calculer la matrice jacobienne de h .

d) Soient $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ données par

$$f(x, y, z) = (e^{y+2x}, x^2 + yz)$$

$$g(x, y) = (\cos x, \sin y)$$

Donner l'expression de la composition $h = g \circ f$ et calculer sa matrice jacobienne.

Exercice 4. Règle de la chaîne

Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$. On considère la courbe paramétrée suivante $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (e^{-t} \cos(2\pi t), e^{-t} \sin(2\pi t))$$

a) Calculer la dérivée de la fonction $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

b) Répéter le point précédent en utilisant la courbe:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

Pourquoi la valeur de la dérivée est-elle 0? Penser aux ensembles de niveaux de f et à la formule de dérivation de fonctions composées :

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\frac{dy}{dt}(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle.$$

Exercice 5. Règle de la chaine

- a) On donne la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1, x_2) = (x_2^2, x_1 - x_2)$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\nabla g(y_1, y_2) = (-y_2 \sin(y_1), \cos(y_1) + 2y_2)$. On considère la composition $h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Calculer $\nabla h(1, 0)$.
- b) On donne la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x_1, x_2) = (-x_1(1 - 2x_2), x_1^2(1 - x_2), x_1x_2)$ et une fonction $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$. On considère la composition $h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Alors

$$\square \frac{\partial h}{\partial x_2}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(-1, 1, 0) - 2\frac{\partial g}{\partial y_2}(-1, 1, 0) + \frac{\partial g}{\partial y_3}(-1, 1, 0)$$

$$\square \frac{\partial h}{\partial x_2}(1, 0) = 2\frac{\partial g}{\partial y_1}(1, 0, 0) - 2\frac{\partial g}{\partial y_2}(1, 0, 0) + \frac{\partial g}{\partial y_3}(1, 0, 0)$$

$$\square \frac{\partial h}{\partial x_2}(1, 0) = 2\frac{\partial g}{\partial y_1}(-1, 1, 0) - \frac{\partial g}{\partial y_2}(-1, 1, 0) + \frac{\partial g}{\partial y_3}(-1, 1, 0)$$

$$\square \frac{\partial h}{\partial x_2}(1, 0) = -\frac{\partial g}{\partial y_1}(-1, 1, 0) + 2\frac{\partial g}{\partial y_2}(-1, 1, 0)$$

Exercice 6. Révisions plan tangent

Pour les fonctions $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et les points $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ donnés ci-dessous, donner l'équation du plan tangent au graphe de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

a) $f(x, y) = x - y - x^2 + y^3$, $(x_0, y_0) = (-2, 1)$.

b) $f(x, y) = 5 - x^2 - \sin(xy)$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

c) $f(x, y) = \tan(x^2 + y)$, $(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, 0\right)$.

Exercice 7. Révision - gradient et direction de croissance maximale

On considère la fonction

$$f(x, y) = 2(x - 1)^2 + y^2.$$

- a) Dans quelle direction à partir de $(2, 3, f(2, 3))$ la pente du graphe de f est-elle maximale ? Donner la valeur de la pente.
- b) Quelle direction à partir $(2, 3, f(2, 3))$ doit-on suivre pour se trouver sur un ensemble de niveau ?
- c) Si on se dirige à partir du point $(2, 3, f(2, 3))$ selon la direction "en vue de haut" $v = (1, 1)$, que vaut la valeur de la pente ?

Réponses

Exercice 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= (2 + 4xy)e^{xy} + (x^2 + y^2)y^2 e^{xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= (2 + 4xy)e^{xy} + (x^2 + y^2)x^2 e^{xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = (3 + xy)(x^2 + y^2)e^{xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= -\cos(xy + x)(y + 1)^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -\cos(xy + x)x^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\cos(xy + x)(y + 1)x - \sin(xy + x) \end{aligned}$$

Exercice 2.

$$\begin{aligned} \text{a) } p_2(x, y) &= -(x - 1) + 2(y + 1) + (x - 1)(y + 1) + (y + 1)^2 . \\ \text{b) } p_2(x, y) &= 1 + (y + 2) + (x + 1)^2 + \frac{1}{2}(y + 2)^2. \\ \text{c) } p_2(x, y) &= 1 + (x - 2) + 4y + (x - 2)^2 + 9(x - 2)y + 16y^2. \\ \text{d) } p_2(x, y) &= (x - 1) + y + (x - 1)y - \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{1}{2}y^2. \end{aligned}$$

Exercice 3.

$$\text{a) } \nabla g(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \text{ et } \nabla(f \circ g)(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

$$\text{b) } \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } h(x, y) = ((x - y)^2, (x + y)^2) \text{ et } \nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x - y) & -2(x - y) \\ 2(x + y) & 2(x + y) \end{pmatrix}.$$

$$\text{d) } h(x, y, z) = (\cos(e^{y+2x}), \sin(x^2 + yz)) \text{ et}$$

$$\nabla h(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2 \sin(e^{y+2x})e^{y+2x} & -\sin(e^{y+2x})e^{y+2x} & 0 \\ 2x \cos(x^2 + yz) & z \cos(x^2 + yz) & y \cos(x^2 + yz) \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

$$\text{a) } f(\gamma(t)) = e^{-2t} \text{ et } \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = -2e^{-2t}.$$

$$\text{b) } f(\gamma(t)) = 1 \text{ et } \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0.$$

Exercice 5.

$$\text{a) } \nabla h(1, 0) = (3, -3).$$

$$\text{b) } \frac{\partial h}{\partial x_2}(1, 0) = 2 \frac{\partial g}{\partial y_1}(-1, 1, 0) - \frac{\partial g}{\partial y_2}(-1, 1, 0) + \frac{\partial g}{\partial y_3}(-1, 1, 0).$$

Exercice 6.

a) $z = 5x + 2y + 2.$

b) $z = -2x - y + 6.$

c) $z = 2\sqrt{\pi}x + 2y + 1 - \pi.$

Exercice 7.a) Le gradient donne la direction de pente maximale. La valeur de la pente est $\|\nabla f\| = 2\sqrt{13}.$ b) Il faut suivre la direction orthogonale au gradient, par exemple $(-6, 4).$

c) $p = 5\sqrt{2}.$