

Exercice 1. Fonction \mathcal{C}^1 sur un fermé

On a vu en cours que pour une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert Ω , on dit que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ si toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues dans Ω . Il est possible de définir l'ensemble $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ également. Il existe deux définitions standards.

Définition 1 : (Définition par prolongement)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Pour $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ si $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$ et si toutes les dérivées partielles de f sont prolongeables par continuité sur $\overline{\Omega}$.

Définition 2 : (Définition par extension)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Pour $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ s'il existe un ouvert \mathcal{O} tel que $\overline{\Omega} \subset \mathcal{O}$ et $g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ tels que $g|_{\overline{\Omega}} = f$.

L'intérêt de la définition 2 est de pouvoir parler du gradient de f sur $\partial\Omega$ en le définissant comme le gradient g , puisque ce dernier existe en particulier sur $\partial\Omega$ puisqu'il existe pour tout $x \in \mathcal{O}$. Ces deux définitions ne sont *malheureusement* pas équivalentes dans \mathbb{R}^n pour $n \geq 2$. La définition 2 implique la 1, mais la réciproque n'est vraie que si $\partial\Omega$ n'a pas une forme "trop compliquée". Ce résultat est non trivial et sort du cadre de ce cours.

Cependant, pour $n = 1$, on peut montrer l'équivalence entre les deux définitions. Dans cet exercice, on se contentera de montrer que la définition 1 implique la 2.

Résultat à montrer : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \in \mathcal{C}^0([a, b]) \cap \mathcal{C}^1(]a, b[)$ et telle que f' est prolongeable par continuité en $x = a$ et $x = b$.

Montrer qu'il existe un intervalle ouvert $]a - \varepsilon, b + \varepsilon[\supset]a, b[$ et une fonction $g :]a - \varepsilon, b + \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g \in \mathcal{C}^1(]a - \varepsilon, b + \varepsilon[)$ et $g|_{[a, b]} = f$.

Correction.

Comme f' est prolongeable par continuité en a et en b , et $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$, on sait que f est dérivable à gauche de b avec $f'_g(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$ et dérivable à droite de a avec $f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$. Soit $\varepsilon > 0$, définissons la fonction $g :]a - \varepsilon, b + \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x), & \forall x \in [a, b], \\ g(x) &= f(a) + f'_d(a)(x - a), & \forall x \in]a - \varepsilon, a[, \\ g(x) &= f(b) + f'_g(b)(x - b), & \forall x \in]b, b + \varepsilon[. \end{aligned}$$

On a bien $g|_{[a, b]} = f$. Il suffit de montrer que $g \in \mathcal{C}^1(]a - \varepsilon, b + \varepsilon[)$, en vérifiant que

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = g(a) \text{ et } \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} g(x) = g(b) \text{ (} g \text{ continue),} \\ \lim_{x \rightarrow a^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g'(x) = g'(a) \text{ et } \lim_{x \rightarrow b^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} g'(x) = g'(b) \text{ (} g \text{ continûment dérivable),} \end{cases}$$

ce qui est immédiat.

Remarque : on gagne naturellement que les dérivées sont égales, c'est-à-dire $g'(x) = f'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$ et que $g'(a) = f'_d(a)$ et $g'(b) = f'_g(b)$.

Dernière remarque : dans une série précédente, on avait vu que la définition 1 était équivalente à demander la dérivabilité sur le fermé (existence de f' pour tout $x \in [a, b]$), et la continuité de la dérivée sur le fermé. On obtient alors trois définitions différentes (mais équivalentes) pour définir la notion $\mathcal{C}^1([a, b])$.

Exercice 2. Théorème des accroissements finis pour fonctions vectorielles

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction vectorielle telle que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Soient $x, y \in \Omega$ tels que $[x, y] \subset \Omega$. Montrer que

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \nabla f(x + t(y - x)) \cdot (y - x) dt,$$

où $\nabla f(x+t(y-x)) \cdot (y-x)$ est le produit matrice (jacobienne)-vecteur en identifiant $x, y \in \mathbb{R}^n$ avec les colonnes $(x_1, \dots, x_n)^T$ et $(y_1, \dots, y_n)^T$. Ici, pour $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, on comprend le symbole $\int_0^1 v dt$ comme l'intégrale de chaque composante du vecteur $v \in \mathbb{R}^m$.

En appliquant le résultat au cas particulier d'une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C^1([a, b])$, en déduire que l'on récupère la relation connue (par le théorème fondamental du calcul intégral appliqué à chaque composante de γ) :

$$\gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt.$$

Remarque : on désigne par $[x, y]$ le segment x à y .

Correction.

On définit $\gamma(t) = x + t(y-x)$, $t \in [0, 1]$ comme la paramétrisation du segment $[x, y]$. On a alors que $g = f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ (c'est à dire $g(t) = (g_1(t), \dots, g_m(t)) = (f_1(\gamma(t)), \dots, f_m(\gamma(t)))$) satisfait le théorème fondamental du calcul intégral pour chaque composante

$$g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 g'_i(t) dt, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

La règle de la chaine donne

$$\begin{aligned} g'_i(t) &= (f \circ \gamma)'_i(t) \\ &= (f_i \circ \gamma)'(t) \\ &= \langle \nabla f_i(x + t(y-x)), \dot{\gamma}(t) \rangle \\ &= \langle \nabla f_i(x + t(y-x)), y-x \rangle. \end{aligned}$$

En réunissant les composantes à travers le produit matriciel, on a

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 \nabla f(x + t(y-x)) \cdot (y-x) dt.$$

On conclut en remarquant que $g(1) = f(y)$ et $g(0) = f(x)$.

Alternative : on peut aussi directement appliquer le TAF intégral vu au cours à chaque composante f_i de la fonction f .

Pour une courbe, ce résultat est donné par le théorème fondamental du calcul intégral appliqué à chaque composante γ_i . On peut récupérer ce résultat, en reparamétrant $\gamma(t)$ comme $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(a + s(b-a))$ avec $s \in [0, 1]$ et utilisant que la jacobienne " $\nabla \tilde{\gamma}$ " est $\dot{\tilde{\gamma}}$. On a

$$\gamma(b) - \gamma(a) = \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = \int_0^1 \dot{\tilde{\gamma}}(a + s(b-a))(b-a) ds \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{t=a+s(b-a)} = \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt.$$

Exercice 3. Théorème des accroissements finis pour fonctions vectorielles

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Soient $x, y \in \Omega$ tels que $[x, y] \subset \Omega$ et notons $M = \max_{z \in [x, y]} \|\nabla f(z)\|_F$ où $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius. Prouver que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|.$$

Rappels et remarque :

a) Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$.

b) Pour tout vecteur colonne $v \in \mathbb{R}^n$, $\|Av\| \leq \|A\|_F \|v\|$, où $\|\cdot\|$ désigne la 2-norme.

c) Le résultat reste vrai en demandant que f soit uniquement différentiable sur Ω , c'est-à-dire que chaque composante est différentiable, et en ajoutant l'hypothèse que

$$M = \sup_{z \in]x, y[} \|\nabla f(z)\|_F < +\infty$$

Indication : Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue sur $[a, b]$. Commencer par montrer que

$$\left\| \int_a^b F(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|F(t)\| dt.$$

Correction.

Soit $F \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^m)$. La fonction $t \mapsto \|F(t)\|$ est également continue par composition de fonctions continues ($\|F(t)\| = \sqrt{F_1^2(t) + \dots + F_m^2(t)}$, où $F_i \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \forall i = 1, \dots, m$). Pour les fonctions continues, on peut approximer l'intégrale de Riemann par des sommes. Pour cet exercice, on choisit une suite de partions uniformes de $[a, b]$ pour écrire d'une part

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b-a}{k} \sum_{i=1}^k f\left(a + (b-a)\frac{i}{k}\right),$$

et d'autre part

$$\int_a^b \|f(t)\| dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b-a}{k} \sum_{i=1}^k \left\| f\left(a + (b-a)\frac{i}{k}\right) \right\|.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, l'inégalité triangulaire donne

$$\left\| \frac{b-a}{k} \sum_{i=1}^k f\left(a + (b-a)\frac{i}{k}\right) \right\| \leq \frac{b-a}{k} \sum_{i=1}^k \left\| f\left(a + (b-a)\frac{i}{k}\right) \right\|.$$

Pour passer à la limite, il faut invoquer la continuité de la norme afin d'écrire $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\cdot\| = \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \cdot \right\|$.

On utilise le théorème des accroissements finis sous forme intégrale pour obtenir

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\| &= \left\| \int_0^1 \nabla f(x + t(y-x)) \cdot (y-x) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|\nabla f(x + t(y-x)) \cdot (y-x)\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|\nabla f(x + t(y-x))\|_F \|y-x\| dt \\ &\leq M \int_0^1 \|y-x\| dt \\ &= M \|y-x\|. \end{aligned}$$

Alternative pour montrer l'indication : Posons

$$u = \frac{\int_a^b F(t) dt}{\left\| \int_a^b F(t) dt \right\|} \in \mathbb{R}^m.$$

On a que $\|u\| = 1$ et de plus

$$\left\| \int_a^b F(t) dt \right\| = \left\langle u, \int_a^b F(t) dt \right\rangle.$$

Or, en développant le produit scalaire et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\left\langle u, \int_a^b F(t) dt \right\rangle = \sum_{i=1}^m u_i \int_a^b F_i(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^m u_i F_i(t) dt = \int_a^b \langle u, F(t) \rangle dt.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

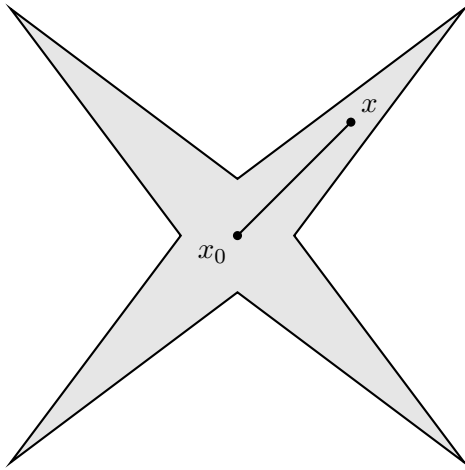
$$\langle u, F(t) \rangle \leq \|u\| \|F(t)\| = \|F(t)\|.$$

D'où on obtient finalement

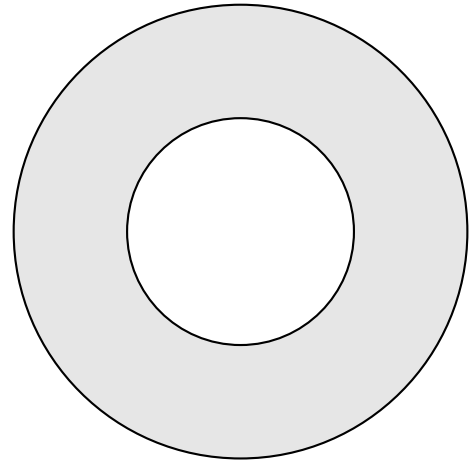
$$\left\| \int_a^b F(t) dt \right\| = \left\langle u, \int_a^b F(t) dt \right\rangle = \int_a^b \langle u, F(t) \rangle dt \leq \int_a^b \|F(t)\| dt.$$

Exercice 4. Inégalité de Poincaré

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné pour lequel il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $\forall x \in \Omega, [x, x_0] \subset \Omega$ (on dit que Ω est un domaine étoilé de centre x_0). Notons $\text{diam}(\Omega) = \sup_{x, y \in \Omega} \|x - y\|$ le diamètre de Ω .



(a) Un domaine étoilé.



(b) Un domain non étoilé.

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- f est bornée sur Ω , i.e. $\sup_{x \in \Omega} |f(x)| < +\infty$.
- $f(x_0) = 0$.
- $f \in C^1(\Omega)$ et $\sup_{x \in \Omega} \|\nabla f(x)\| < +\infty$.

Montrer l'inégalité de Poincaré

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x)| \leq \text{diam}(\Omega) \sup_{x \in \Omega} \|\nabla f(x)\|.$$

Correction.

Soit $x \in \Omega$. Comme $[x, x_0] \subset \Omega$, par le théorème des accroissements finis, on a

$$f(x) = f(x) - f(x_0) = \langle \nabla f(z), (x - x_0) \rangle,$$

où $z \in]x, x_0[$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\langle \nabla f(z), (x - x_0) \rangle| \\ &\leq \|\nabla f(z)\| \cdot \|x - x_0\| \\ &\leq \sup_{x \in \Omega} \|\nabla f(x)\| \text{diam}(\Omega). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x)| \leq \sup_{x \in \Omega} \|\nabla f(x)\| \text{diam}(\Omega).$$

Exercice 5. Preuve de la règle de la chaîne

Soient $f : \Omega_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \Omega_g \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ avec Ω_f, Ω_g des ouverts tels que $f(\Omega_f) \subset \Omega_g$. Soit $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ tel que f est différentiable en x_0 et g est différentiable en $f(x_0)$. Noton enfin $x = (x_1, x_2)$, $f(x) = f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) = (f_1(x), f_2(x))$ et $y = (y_1, y_2)$, $g(y) = g(y_1, y_2)$.
Montrer que $h = g \circ f$ est différentiable en x_0 et de plus

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x_0)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0), \quad i = 1, 2.$$

Correction.

On va montrer que h est différentiable en montrant que h admet un développement limité à l'ordre 1 autour de x_0 , c'est à dire qu'il existe $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire telle que pour tout $x \in \Omega_f$, on a

$$h(x) = h(x_0) + L(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

De plus, on aura directement que

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = L(e_i),$$

puisque si h est différentiable, alors nécessairement $L(r) = \langle \nabla h(x_0), r \rangle$, $\forall r \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_0 + r \in \Omega_f$.

On va composer les développements limités. Pour f , on a $\forall x \in \Omega_f$

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + r_f(x)$$

où $\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$ représente le produit matrice-vecteur (on interprète $x - x_0$ comme un vecteur colonne) et $r_f(x) = o(\|x - x_0\|)$, $r_f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Pour g , on a $\forall x \in \Omega_g$,

$$g(y) = g(y_0) + \langle \nabla g(y_0), y - y_0 \rangle + r_g(y),$$

avec $r_g(y) = o(\|y - y_0\|)$, et $r_g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

On pose $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$. On a

$$\begin{aligned} h(x) &= g(f(x)) = g\left(f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + r_f(x)}_{=t(x)}\right) \\ &= g(f(x_0)) + \langle \nabla g(f(x_0)), t(x) \rangle + r_g(f(x)) \\ &= g(f(x_0)) + \langle \nabla g(f(x_0)), \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \rangle + \underbrace{\langle \nabla g(f(x_0)), r_f(x) \rangle}_{A(x)} + \underbrace{r_g(f(x))}_{=B(x)}. \end{aligned}$$

Observons que

$$\begin{aligned} \langle \nabla g(f(x_0)), \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \rangle &= \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x_0)) \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) (x_i - x_i^0) \right) \\ &= \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x_0)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) \right) (x_i - x_i^0). \end{aligned}$$

Dès lors, si $A(x) = o(\|x - x_0\|)$ et $B(x) = o(\|x - x_0\|)$, on aura $A(x) + B(x) = o(\|x - x_0\|)$ et par conséquent, on pourra poser

$$L(x - x_0) = \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x_0)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) \right) (x_i - x_i^0),$$

et on aura

$$L(e_i) = \frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x_0)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0).$$

Montrons alors que $A(x) = o(\|x - x_0\|)$ et $B(x) = o(\|x - x_0\|)$. D'une part,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|A(x)|}{\|x - x_0\|} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|\langle \nabla g(f(x_0)), r_f(x) \rangle|}{\|x - x_0\|} \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|\nabla g(f(x_0))\| \cdot \|r_f(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$

comme $r_f(x) = o(\|x - x_0\|)$. D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|B(x)|}{\|x - x_0\|} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|r_g(f(x))|}{\|x - x_0\|},$$

puisque $r_g(y) = o(\|y - y_0\|)$, il existe $\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$r_g(y) = \|y - y_0\| \varepsilon(y), \quad \varepsilon(y_0) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \varepsilon(y) = 0$$

(en particulier ε est continue en y_0). Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|B(x)|}{\|x - x_0\|} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0)\| \varepsilon(f(x))}{\|x - x_0\|} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + r_f(x)\|}{\|x - x_0\|} \varepsilon(f(x)) \\ &\leq \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|\nabla f\|_F \|x - x_0\| + \|r_f(x)\|}{\|x - x_0\|} \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(f(x)) \\ &= \left(\|\nabla f(x_0)\|_F + \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|r_f(x)\|}{\|x - x_0\|}}_{=0} \right) \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(f(x)). \end{aligned}$$

Comme $f(x_0) = y_0$ et $\varepsilon \circ f$ est continue en x_0 par composition de fonctions continues, on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(f(x)) = \varepsilon \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) = \varepsilon(f(x_0)) = \varepsilon(y_0) = 0,$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 6. Révision - Fonction continûment différentiable

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .

b) Montrer que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur \mathbb{R}^2 .

c) Montrer que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur \mathbb{R}^2 et donc que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Correction.

a) La fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (la composition de fonctions continues donne des fonctions continues). En $(x,y) = (0,0)$ on a en coordonnées polaires $|f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))| \leq r^2 \log(r^2)$ et donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

b) Pour $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

et les dérivées partielles en $(x,y) = (0,0)$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot 0 \cdot \ln(h^2) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot h \cdot \ln(h^2) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

c) Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont donc continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que compositions de fonctions continues. Pour étudier leur continuité en $(0,0)$, on utilise les coordonnées polaires dans (1). On trouve

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| = \left| r \sin(\theta) \ln(r^2) + 2 \frac{r^3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)}{r^2} \right| \leq 2|r \ln(r)| + 2r$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = \left| r \cos(\theta) \ln(r^2) + 2 \frac{r^3 \cos(\theta) \sin(\theta)^2}{r^2} \right| \leq 2|r \ln(r)| + 2r$$

On calcule la limite du premier terme dans ces expressions avec Bernoulli-Hôpital :

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r \ln(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\ln(r)}{\frac{1}{r}} \stackrel{BH}{=} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{r}}{-\frac{1}{r^2}} = - \lim_{r \rightarrow 0^+} r = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

c'est-à-dire les dérivées partielles de f sont continues sur \mathbb{R}^2 . On a donc bien $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 7. Révision - fonction non continûment différentiable

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.

b) Montrer que f n'est pas continûment différentiable en $(0,0)$.

Correction.

a) On calcule les dérivées partielles en $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0.$$

De même,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

ainsi $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$. Montrons que f est différentiable en $(0, 0)$. Pour cela, on vérifie que

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - \langle \nabla f(0, 0), (h_1, h_2) \rangle}{\|(h_1, h_2)\|} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{h_1 h_2 \sin((h_1^2 + h_2^2)^{-1})}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

En coordonnées polaires, on a

$$\left| \frac{h_1 h_2 \sin((h_1^2 + h_2^2)^{-1})}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| = \left| \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta \sin(r^{-2})}{r} \right| \leq r \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0.$$

Ainsi f est différentiable en $(0, 0)$.

b) On calcule par exemple $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et on montre que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

En coordonnées polaires, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= r \sin \theta \sin(r^{-2}) - \frac{2r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^4} \cos(r^{-2}) \\ &= r \sin \theta \sin(r^{-2}) - 2r^{-1} \cos^2 \theta \sin \theta \cos(r^{-2}). \end{aligned}$$

Pour $\theta = \pi/4$ (par exemple), on obtient

$$\frac{2}{r} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(r^{-2}) = \frac{1}{2r} \cos(r^{-2}),$$

qui n'a pas de limite pour $r \rightarrow 0^+$, ainsi $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ n'existe pas.