

Exercice 1. Fonction $\mathcal{C}^1$ sur un fermé

On a vu en cours que pour une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert Ω , on dit que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ si toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues dans Ω . Il est possible de définir l'ensemble $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ également. Il existe deux définitions standards.

Définition 1 : (Définition par prolongement)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Pour $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ si $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$ et si toutes les dérivées partielles de f sont prolongeables par continuité sur $\overline{\Omega}$.

Définition 2 : (Définition par extension)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Pour $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ s'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ tel que $\overline{\Omega} \subset \mathcal{O}$ et $g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ tels que $f|_{\overline{\Omega}} = g$.

L'intérêt de la définition 2 est de pouvoir parler du gradient de f sur $\partial\Omega$ en le définissant comme le gradient g , puisque ce dernier existe en particulier sur $\partial\Omega$ puisqu'il existe pour tout $x \in \mathcal{O}$. Ces deux définitions ne sont *malheureusement* pas équivalentes dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$. La définition 2 implique la 1, mais la réciproque n'est vraie que si $\partial\Omega$ n'a pas une forme "trop compliquée". Ce résultat est non trivial et sort du cadre de ce cours.

Cependant, pour $n = 1$, on peut montrer l'équivalence entre les deux définitions. Dans cet exercice, on se contentera de montrer que la définition 1 implique la 2.

Résultat à montrer : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \in \mathcal{C}^0([a, b]) \cap \mathcal{C}^1(]a, b[)$ et telle que f' est prolongeable par continuité en $x = a$ et $x = b$.

Montrer qu'il existe un intervalle ouvert $]a - \varepsilon, b + \varepsilon[\supset]a, b]$ et une fonction $g :]a - \varepsilon, b + \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \in \mathcal{C}^1(]a - \varepsilon, b + \varepsilon[)$ et $g|_{[a, b]} = f$.

Exercice 2. Théorème des accroissements finis pour fonctions vectorielles

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction vectorielle telle que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Soient $x, y \in \Omega$ tels que $[x, y] \subset \Omega$. Alors

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \nabla f(x + t(y - x)) \cdot (y - x) dt,$$

où $\nabla f(x + t(y - x)) \cdot (y - x)$ est le produit matrice (jacobienne)-vecteur en identifiant $x, y \in \mathbb{R}^n$ avec les colonnes $(x_1, \dots, x_n)^T$ et $(y_1, \dots, y_n)^T$. Ici, pour $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, on comprend le symbole $\int_0^1 v dt$ comme l'intégrale de chaque composante du vecteur $v \in \mathbb{R}^m$.

Exercice 3. Théorème des accroissements finis pour fonctions vectorielles

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Soient $x, y \in \Omega$ tels que $[x, y] \subset \Omega$ et notons $M = \max_{z \in [x, y]} \|\nabla f(z)\|_F$ où $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius. Prouver que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|.$$

Rappels et remarque :

1. Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$.
2. Pour tout vecteur colonne $v \in \mathbb{R}^n$, $\|Av\| \leq \|A\|_F \|v\|$, où $\|\cdot\|$ désigne la 2-norme.
3. Le résultat reste vrai en demandant que f soit uniquement différentiable sur Ω , c'est-à-dire que chaque composante est différentiable, et en ajoutant l'hypothèse que

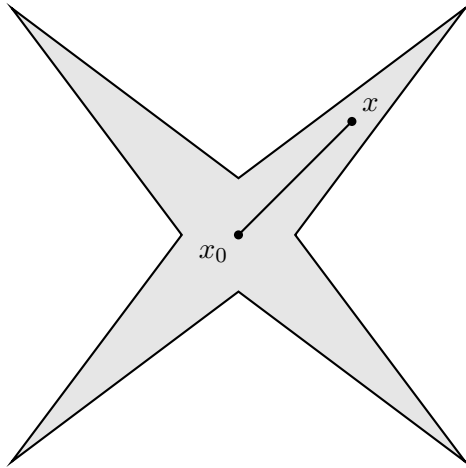
$$M = \sup_{z \in]x, y[} \|\nabla f(z)\|_F < +\infty$$

Indication : Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue sur $[a, b]$. Commencer par montrer que

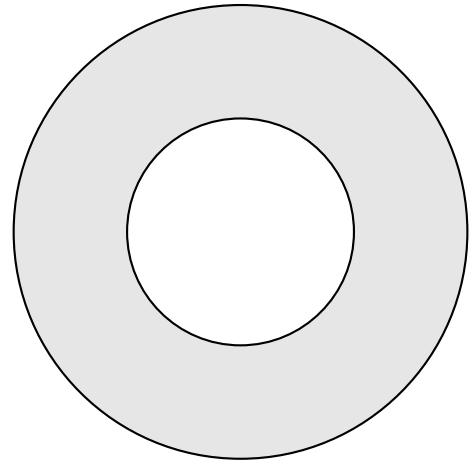
$$\left\| \int_a^b F(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|F(t)\| dt.$$

Exercice 4. Inégalité de Poincaré

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné pour lequel il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $\forall x \in \Omega, [x, x_0] \subset \Omega$ (on dit que Ω est un domaine étoilé de centre x_0). Notons $\text{diam}(\Omega) = \sup_{x, y \in \Omega} \|x - y\|$ le diamètre de Ω .



(a) Un domaine étoilé.



(b) Un domaine non étoilé.

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- f est bornée sur Ω , i.e. $\sup_{x \in \Omega} |f(x)| < +\infty$.
- $f(x_0) = 0$.
- $f \in C^1(\Omega)$ et $\sup_{x \in \Omega} \|\nabla f(x)\| < +\infty$.

Montrer l'inégalité de Poincaré

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x)| \leq \text{diam}(\Omega) \sup_{x \in \Omega} \|\nabla f(x)\|.$$

Exercice 5. Preuve de la règle de la chaîne

Soient $f : \Omega_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \Omega_g \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ avec Ω_f, Ω_g des ouverts tels que $f(\Omega_f) \subset \Omega_g$. Soit $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ tel que f est différentiable en x_0 et g est différentiable en $f(x_0)$. Noton enfin $x = (x_1, x_2)$, $f(x) = f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) = (f_1(x), f_2(x))$ et $y = (y_1, y_2)$, $g(y) = g(y_1, y_2)$. Montrer que $h = g \circ f$ est différentiable en x_0 et de plus

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x_0)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0), \quad i = 1, 2.$$

Exercice 6. Révision - Fonction continûment différentiable

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et donc que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 7. Révision - fonction non continûment différentiable

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable en $(0, 0)$.
2. Montrer que f n'est pas continûment différentiable en $(0, 0)$.