Leonid Monin
Léo Navarro Chafloque

EPFL, semestre de printemps 2026
Rings and fields

Exercices – Semaine 5

Exercice 1.
Soit A un anneau commutatif. Soit k un corps. On dit qu'un élément $a \in A$ est *idempotent* si $a^2 = a$.

1. Quels sont les idempotents de $k \times k$?
2. Montrez que $e \in A$ est un idempotent si et seulement si $1 - e$ l'est aussi.
3. Soit e un idempotent de A. Montrez que l'application naturelle
$$A \to A/(e) \times A/(1-e)A$$
qui envoie $a \mapsto (\pi_e(a), \pi_{1-e}(a))$ où $\pi_e \colon A \to A/(e)$ et $\pi_{1-e} \colon A \to A/(1-e)$ sont les applications quotients est un isomorphisme.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer tous les idempotents de
$$k[t]/(t^n).$$
Cet anneau est-il isomorphe à un produit d'anneau non-nuls ?

Exercice 2.
Déterminez quel idéaux sont premiers et/ou maximaux dans les cas suivants.

1. $(3, t^3 + 1) \subset \mathbb{Z}[t]$.
2. $(t^3 + t + 1) \subset \mathbb{Z}[t]$.
3. $(3, t^3 + t + 1) \subset \mathbb{Z}[t]$.

Exercice 3.
Dans cet exercice, nous étudions les anneaux $\mathbb{Z}[i]/(p)$ pour p un nombre premier. Nous écrirons $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Montrez que $\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{F}_p[t]/(t^2+1)$.
Indication : Utilisez le quotient en deux temps.
2. Pour $p = 5$, montrez que $\mathbb{Z}[i]/(5) \cong \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$.
Indication : Le théorème des restes chinois peut être utile.
3. Plus généralement montrez que $\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \equiv 1 \mod 4$.
*Indication: Montrez que l'hypothèse est équivalente à l'existence de deux racines carrés disctintes de -1 dans $\mathbb{F}_p$. Pour une direction, on utilisera que $\mathbb{F}_p^\times$ est un groupe cyclique.**
4. Montrez que (p) est premier comme idéal de $\mathbb{Z}[i]$ si et seullement si $p \equiv 2, 3 \mod 4$ et $p \neq 2$.

Exercice 4.
Soit un anneau commutatif A avec $2 \in A^\times$. Montrez qu'il existe un isomorphisme de A-algèbres (cela signifie que les constantes de $a \in A[t]$ sont envoyées sur les éléments diagonaux (a, a) de $A \times A$)
$$A[t]/(t^2-1) \cong A \times A.$$
Si $2 \notin A^\times$, alors montrez qu'un tel isomorphisme ne peux exister.

*Voici une preuve de ce fait. Si ce groupe n'était pas cyclique, par la classification des groupes abéliens de type fini, il existerait $n < p - 1$ tel que $x^n = 1$ pour tout $x \in \mathbb{F}_p^\times$. Mais alors $t^n - 1$ aurait $p - 1$ racines dans $\mathbb{F}_p$ ce qui est absurde.

Exercice 5.
Soit A un anneau commutatif. On note $\mathrm{nil}(A)$ pour les éléments nilpotents de A. On dit qu'un premier $\mathfrak{p}$ est *minimal* si pour un autre premier $\mathfrak{q}$, la relation $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ implique $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Soit k un corps.

1. Déterminer $\mathrm{nil}(A)$, où $A = {}^{k[x,y]}\big/_{(x^2y^3)}$.
2. Écrire $\mathrm{nil}(A)$ comme l'intersection d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$, $\mathrm{nil}(A) = \cap_{i=1}^{m} \mathfrak{p}_i$, pour m minimal.
3. Déterminer les premiers minimaux de A.