

Solutions – Semaine 5

Exercice 1.

Soit A un anneau commutatif. Soit k un corps. On dit qu'un élément $a \in A$ est *idempotent* si $a^2 = a$.

1. Quels sont les idempotents de $k \times k$?
2. Montrez que $e \in A$ est un idempotent si et seulement si $1 - e$ l'est aussi.
3. Soit e un idempotent de A . Montrez que l'application naturelle

$$A \rightarrow A/(e) \times A/(1-e)A$$

qui envoie $a \mapsto (\pi_e(a), \pi_{1-e}(a))$ où $\pi_e: A \rightarrow A/(e)$ et $\pi_{1-e}: A \rightarrow A/(1-e)$ sont les applications quotients est un isomorphisme.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer tous les idempotents de

$$k[t]/(t^n).$$

Cet anneau est-il isomorphe à un produit d'anneau non-nuls ?

Exercice 2.

Déterminez quel idéaux sont premiers et/ou maximaux dans les cas suivants.

1. $(3, t^3 + 1) \subset \mathbb{Z}[t]$.
2. $(t^3 + t + 1) \subset \mathbb{Z}[t]$.
3. $(3, t^3 + t + 1) \subset \mathbb{Z}[t]$.

Exercice 3.

Dans cet exercice, nous étudions les anneaux $\mathbb{Z}[i]/(p)$ pour p un nombre premier. Nous écrirons $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Montrez que $\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{F}_p[t]/(t^2 + 1)$.
Indication : Utilisez le quotient en deux temps.
2. Pour $p = 5$, montrez que $\mathbb{Z}[i]/(5) \cong \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$.
Indication : Le théorème des restes chinois peut être utile.
3. Plus généralement montrez que $\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \equiv 1 \pmod{4}$.
*Indication: Montrez que l'hypothèse est équivalente à l'existence de deux racines carrées distinctes de -1 dans $\mathbb{F}_p$. Pour une direction, on utilisera que $\mathbb{F}_p^\times$ est un groupe cyclique.**
4. Montrez que (p) est premier comme idéal de $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si $p \equiv 2, 3 \pmod{4}$ et $p \neq 2$.

Exercice 4.

Soit un anneau commutatif A avec $2 \in A^\times$. Montrez qu'il existe un isomorphisme de A -algèbres (cela signifie que les constantes de $A[t]$ sont envoyées sur les éléments diagonaux de $A \times A$)

$$A[t]/(t^2 - 1) \cong A \times A.$$

Si $2 \notin A^\times$, alors montrez qu'un tel isomorphisme ne peut exister.

*Voici une preuve de ce fait. Si ce groupe n'était pas cyclique, par la classification des groupes abéliens de type fini, il existerait $n < p - 1$ tel que $x^n = 1$ pour tout $x \in \mathbb{F}_p^\times$. Mais alors $t^n - 1$ aurait $p - 1$ racines dans $\mathbb{F}_p$ ce qui est absurde.

Exercice 5.

Soit A un anneau commutatif. On note $\text{nil}(A)$ pour les éléments nilpotents de A . On dit qu'un premier $\mathfrak{p}$ est *minimal* si pour un autre premier $\mathfrak{q}$, la relation $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ implique $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Soit k un corps.

1. Déterminer $\text{nil}(A)$, où $A = k[x, y] / (x^2 y^3)$.
2. Écrire $\text{nil}(A)$ comme l'intersection d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$, $\text{nil}(A) = \cap_{i=1}^m \mathfrak{p}_i$, pour m minimal.
3. Déterminer les premiers minimaux de A .