

**Exercice 1.**

a)  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

b)  $D(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  et  $\sin(x) = 0 \iff x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} D(f) &= \mathbb{R} \setminus (\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}) \\ &= \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

c)  $D(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  et  $\cos(x) = 0 \iff x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} D(f) &= \mathbb{R} \setminus (\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}) \\ &= \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

d)  $D(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  et  $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} = \frac{2}{\pi + 2k\pi}$ . De plus,  $\frac{1}{x}$  n'est pas définie pour  $x = 0$ . Ainsi,

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left( \left\{ \frac{2}{\pi + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{0\} \right)$$

e) Nous avons  $x^2 + x = x(x+1) = 0 \iff x \in \{0; -1\}$ . Ainsi,

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$$

f) Nous avons  $x + 1 = 0 \iff x = -1$ . Ainsi,

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

g) Comme  $x^2 + 1 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , nous avons  $D(f) = \mathbb{R}$ .

h)  $D(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Or  $\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$ . Ainsi,

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

i) Comme  $D(\arctan) = \mathbb{R}$  et  $D(|x|) = \mathbb{R}$ , nous avons  $D(f) = \mathbb{R}$ .

j)  $D(\arcsin) = [-1; 1]$ . De plus,  $\frac{x}{x+1} \in [-1; 1] \iff -1 \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$   
 $\iff -x - 1 \leq x \leq x + 1$   
 $\iff -x - 1 \leq x$  et  $x \leq x + 1$   
 $\iff -1 \leq 2x$  et  $0 \leq 1$   
 $\iff x \geq -\frac{1}{2}$   
 $\iff x \in [-\frac{1}{2}; +\infty[$

Ainsi,

$$D(f) = [-\frac{1}{2}; +\infty[$$

k)  $D(\sqrt{x}) = \mathbb{R}_+$ . De plus,  $\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} \geq 0 \iff \frac{x(x-1) - x(x+1)}{(x+1)(x-1)} \geq 0$   
 $\iff \frac{x(x-1-x-1)}{x^2-1} \geq 0$   
 $\iff \frac{-2x}{x^2-1} \geq 0$

Pour résoudre cette dernière inéquation, on effectue une étude de signe :

	-1	0	1
$-2x$	+	0	-
$x^2 - 1$	+	0	-
$\frac{-2x}{x^2-1}$	+	-	-

Ainsi,  $\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} \geq 0$  pour tout  $x \in ]-\infty; -1[ \cup [0; 1[$ . Donc

$$D(f) = ]-\infty; -1[ \cup [0; 1[$$

l)  $D(x^2) = \mathbb{R}$  et  $D(\sqrt[3]{x}) = \mathbb{R}$ , alors  $D(f) = \mathbb{R}$ .

m) Attention : on rappelle que l'égalité  $(\sqrt[n]{x})^m = (\sqrt[n]{x^m})$  n'est pas nécessairement vraie si  $x < 0$ ; par exemple, si  $x$  est négatif,  $(\sqrt{x})^2$  n'est pas défini, alors que  $\sqrt{x^2} = |x|$ . Une conséquence en est qu'on ne définit  $x^{\frac{m}{n}}$  que si  $\frac{m}{n}$  est irréductible, ou, plus simplement, si  $m$  et  $n$  n'ont pas de facteur 2 en commun (sinon, pour  $x < 0$  pourrait avoir par exemple  $x^{\frac{2}{2}} = x^1 = x$ , alors que ce n'est ni la valeur de  $(\sqrt{x})^2$ , ni celle de  $\sqrt{x^2} = |x|$ ). En d'autres termes,  $x^{\frac{m}{n}} := (\sqrt[q]{x})^p = (\sqrt[q]{x^p})$ , où  $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$  et  $p, q$  ne sont pas tous les deux pairs.

Supposons dorénavant que  $m$  et  $n$  n'ont plus de facteur 2 en commun dans  $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ . Alors

$$D(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \text{ impair,} \\ \mathbb{R}_+ & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

### Exercice 2.

a)  $f$  est paire car 
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^6 + (-x)^4 + (-x)^2 + 1 \\ &= x^6 + x^4 + x^2 + 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b)  $f$  est impaire car 
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 - (-x)^3 + \sin(-x) \\ &= -x^5 + x^3 - \sin(x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

c)  $f$  est paire car 
$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x) + (-x)^{16} \\ &= \cos(x) + (x)^{16} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

d)  $f$  est ni paire ni impaire car 
$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x) + \sin(-x) \\ &= \cos(x) - \sin(x) \\ &\neq \pm f(x) \end{aligned}$$

e)  $f$  est paire car 
$$\begin{aligned} f(-x) &= 3\cos^2(-x) + 7\sin^2((-x)^2) \\ &= 3\cos^2(x) + 7\sin^2(x^2) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

f)  $f$  est paire car 
$$\begin{aligned} f(-x) &= (\cos(-x))^2 + (\sin(-x))^2 \\ &= (\cos(x))^2 + (-\sin(x))^2 \\ &= \cos^2(x) + \sin^2(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

g)  $f$  est impaire car 
$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-x}{|-x|} \\ &= \frac{-x}{|x|} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

**Exercice 3.** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction quelconque.

$$\begin{aligned} f \text{ est paire et impaire} &\iff f(-x) = f(x) \text{ et } f(-x) = -f(x) \text{ et } (x \in D \implies -x \in D) \\ &\iff f(x) = f(-x) = -f(x) \text{ et } (x \in D \implies -x \in D) \\ &\iff f(x) = 0 \ \forall x \in D \text{ et } (x \in D \implies -x \in D) \end{aligned}$$

Ainsi, les seules fonctions paires et impaires sont les fonctions nulles sur leur domaine de définition symétrique par rapport à l'origine.

### Exercice 4.

a)  $p$  est paire car 
$$\begin{aligned} p(-x) &= \frac{1}{2}(f(-x) + f(-(-x))) \\ &= \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) \\ &= p(x) \end{aligned}$$

**b)** Nous avons 
$$\begin{aligned} i(x) &= f(x) - p(x) \\ &= f(x) - \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{aligned}$$

Ainsi, 
$$\begin{aligned} i(-x) &= \frac{1}{2}(f(-x) - f(-(-x))) \\ &= \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) \\ &= -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \\ &= -i(x) \end{aligned}$$

Ceci nous permet de conclure que  $i$  est impaire.

**c)** Nous savons par **a)** et **b)** que  $p$  est paire et  $i$  est impaire. Or,  $p+i = p+f-p = f$  et comme  $f$  est quelconque, l'assertion est démontrée.

**d)** Nous avons

**i)** 
$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ &= \frac{1}{2}(7x^5 - 3x^4 + 6x^2 + 4x - 9 + 7(-x)^5 - 3(-x)^4 + 6(-x)^2 + 4(-x) - 9) \\ &= \frac{1}{2}(-6x^4 + 12x^2 - 18) \\ &= -3x^4 + 6x^2 - 9 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} i(x) &= f(x) - p(x) \\ &= 7x^5 - 3x^4 + 6x^2 + 4x - 9 - (-3x^4 + 6x^2 - 9) \\ &= 7x^5 + 4x \end{aligned}$$

**ii)** 
$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2}(g(x) + g(-x)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{3} - x)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(x) \cos(\frac{\pi}{3}) - \sin(x) \sin(\frac{\pi}{3}) + \cos(x) \cos(\frac{\pi}{3}) - \sin(-x) \sin(\frac{\pi}{3})) \\ &= \frac{1}{2}(2 \cos(x) \cos(\frac{\pi}{3})) \\ &= \frac{1}{2} \cos(x) \end{aligned}$$

et ainsi 
$$\begin{aligned} i(x) &= g(x) - p(x) \\ &= \cos(x + \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2} \cos(x) \\ &= \cos(x) \cos(\frac{\pi}{3}) - \sin(x) \sin(\frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2} \cos(x) \\ &= -\sin(x) \sin(\frac{\pi}{3}) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) \end{aligned}$$

### Exercice 5.

**a)** On a :  $f$  admet un axe de symétrie  $x = a \iff f(x+a) = f(-x+a)$   
 $\iff g(x) = g(-x)$   
 $\iff g(x)$  est paire.

**b)** On a :  $f$  admet une symétrie de centre  $(a; b) \iff -f(-x+a) + b = f(x+a) - b$   
 $\iff f(-x+a) - b = -(f(x+a) - b)$   
 $\iff g(-x) = -g(x)$   
 $\iff g(x)$  est impaire.

### Exercice 6.

**a)** Par l'exercice précédent,  $f$  admet la droite  $x = 2$  pour axe de symétrie si et seulement si  $g(x) = f(x+2)$  est paire. Comme

$$\begin{aligned} f(x+2) &= \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2(x+2) + 3 \\ &= \frac{1}{2}(4 + 4x + x^2) - 4 - 2x + 3 \\ &= 2 + 2x + \frac{1}{2}x^2 - 4 - 2x + 3 \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 1 \end{aligned}$$

nous observons que  $g(x) = g(-x)$ , et pouvons ainsi conclure que  $x = 2$  est bien un axe de symétrie de  $f$ .

- b) Par l'exercice précédent,  $(-1; 4)$  est un centre de symétrie de  $f$  si et seulement si  $g(x) = f(x - 1) - 4$  est impaire. Comme

$$\begin{aligned} f(x - 1) - 4 &= (x - 1)^3 + 3(x - 1)^2 - (x - 1) + 1 - 4 \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 6x + 3 - x + 1 + 1 - 4 \\ &= x^3 - 4x \end{aligned}$$

nous voyons que  $g(-x) = -g(x)$  et pouvons ainsi conclure que  $(-1; 4)$  est bien un centre de symétrie de  $f$ .

- c) Nous procédons de la même manière que ci-dessus :

$$\begin{aligned} f(3 + x) - 2 &= \frac{2(x + 3) + 1}{(x + 3) - 3} - 2 \\ &= \frac{2x + 7}{x} - 2 \\ &= \frac{7}{x} \end{aligned}$$

La fonction  $g$  donnée par  $g(x) = f(3 + x) - 2$  est bien impaire, et nous pouvons conclure que  $(3; 2)$  est bien un centre de symétrie de  $f$ .

- d)  $f$  admet la droite  $x = -1$  pour axe de symétrie si  $g(x) = f(x - 1)$  est paire. Comme

$$\begin{aligned} f(x - 1) &= \frac{4(x - 1)^2 + 8(x - 1) + 3}{(x - 1)^2 + 2(x - 1) - 3} \\ &= \frac{4x^2 - 8x + 4 + 8x - 8 + 3}{x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 - 3} \\ &= \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} \end{aligned}$$

la fonction  $g$  est bien paire, et nous pouvons conclure que  $x = -1$  est bien un axe de symétrie de  $f$ .

### Exercice 7.

- a) Nous avons que  $f(x) = f(-x)$ ,  $g(x) = g(-x)$  et  $h(-x) = -h(x)$ . C'est donc faux car

$$\begin{aligned} (f + h)(-x) &= f(-x) + h(-x) \\ &= f(x) - h(x) \\ &\neq (f + h)(x) \end{aligned}$$

- b) C'est vrai car  $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x)$
- $$\begin{aligned} &= f(x) + g(x) \\ &= (f + g)(x) \end{aligned}$$

- c) C'est faux car  $\left(\frac{f}{h}\right)(-x) = \frac{f(-x)}{h(-x)}$
- $$\begin{aligned} &= \frac{f(x)}{-h(x)} \\ &= -\left(\frac{f}{h}\right)(x) \end{aligned}$$

- d) C'est vrai car  $(|h|)(-x) = |h(-x)|$
- $$\begin{aligned} &= |-h(x)| \\ &= |h(x)| \\ &= (|h|)(x) \end{aligned}$$

- e) C'est vrai car  $(|f|)(-x) = |f(-x)|$
- $$\begin{aligned} &= |f(x)| \\ &= (|f|)(x) \end{aligned}$$

- f) C'est faux car  $(f + h)^2(-x) = (f^2 + 2fh + h^2)(-x)$
- $$\begin{aligned} &= f^2(-x) + 2f(-x)h(-x) + h^2(-x) \\ &= f^2(x) - 2f(x)h(x) + h^2(x) \\ &\neq (f + h)^2(x) \end{aligned}$$

g) C'est vrai car  $(f^2 + h^2)(-x) = f^2(-x) + h^2(-x)$   
 $= f^2(x) + (-h(x))^2$   
 $= f^2(x) + h^2(x)$   
 $= (f^2 + h^2)(x)$

h) C'est vrai car  $\sin(f(-x)) = \sin(f(x))$

i) C'est vrai car  $\cos(f(-x)) = \cos(f(x))$

j) C'est vrai car  $\sin(h(-x)) = \sin(-h(x))$   
 $= -\sin(h(x))$

### Exercice 8.

a) Considérons  $x, y \in C$  avec  $x \neq y$ . Si  $f \circ g$  est injective, alors  $f \circ g(x) \neq f \circ g(y)$ , c'est-à-dire  $f(g(x)) \neq f(g(y))$ , et forcément  $g(x) \neq g(y)$  (car sinon on aurait  $f(g(x)) = f(g(y))$ ). Donc  $g$  est bien injective.

b) Soit  $y \in E$ . Si  $f \circ g$  est surjective, alors il existe  $x \in C$  avec  $f \circ g(x) = y$ , c'est-à-dire  $f(g(x)) = y$ . En prenant  $z = g(x)$ , on a trouvé un  $z \in D$  qui est envoyé par  $f$  sur  $y$ . La fonction  $f$  est donc surjective.

c) Comme la fonction identité est surjective,  $f \circ g = \text{Id}$  implique que  $f$  est surjective par (b). Comme la fonction identité est aussi injective,  $g \circ f = \text{Id}$  implique que  $f$  est injective par (a).  $f$  est donc bijective et possède une inverse. Cet inverse est bien  $g$ , car si  $f(x) = y$ , alors  $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = x$ ; en d'autres termes,  $g$  envoie bien  $y$  sur l'unique (par injectivité de  $f$ ) élément  $x$  tel que  $f(x) = y$ .

Supposons que  $f$  est bijective avec inverse  $f^{-1}$ . Par définition, l'inverse  $f^{-1}$  envoie  $f(x)$  sur  $x$ , c'est-à-dire  $f^{-1} \circ f(x) = x$  pour tout  $x \in D$ ; de plus, si  $y$  est envoyé sur  $x$  par  $f^{-1}$ , alors par définition encore une fois,  $y = f(x)$ , ou en d'autres termes  $f \circ f^{-1}(y) = y$  pour tout  $y \in E$ . En posant  $f^{-1} = g$ , on trouve bien  $f \circ g = \text{Id}$  et  $g \circ f = \text{Id}$ .

La réciproque de (a) est fautive : prenons par exemple  $g(x) = x$  et  $f(x) = x^2$  (toutes deux définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ) ; la fonction  $g = \text{Id}$  est injective, mais  $f \circ g = f$  ne l'est pas.

La réciproque de (b) est fautive : prenons cette fois  $f = \text{Id}$  et  $g$  la fonction constante nulle (toutes deux définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ) ; la fonction  $f = \text{Id}$  est surjective, mais  $g \circ f = g$  ne l'est pas.

### Exercice 9.

a)  $\sup(f) = 1$ ,  $\inf(f) = -1$ ,  $\max(f) = 1$ , mais  $f$  n'atteint pas son minimum.

b)  $\sup(f) = 4$ ,  $\inf(f) = 0$ ,  $\max(f) = 4$  et  $\min(f) = 0$ .

c)  $\sup(f) = 9$ ,  $\inf(f) = -7$ ,  $\max(f) = 9$  et  $\min(f) = -7$ .

d)  $\sup(f) = 1$ ,  $\inf(f) = 0$ ,  $\max(f) = 1$  et  $\min(f) = 0$ .

**Exercice 10.** Si  $x$  est négatif, on a  $x^2 - x \geq 0$  et donc  $|x^2 - x| = x^2 - x$  et  $|x| = -x$ , ainsi sur  $[-1, 0]$   $f(x) = x^2 - 2x$ . Si  $x \in ]0, 1]$  alors  $x^2 - x \leq 0$  et donc  $|x^2 - x| = -x^2 + x$  et  $|x| = x$ . Ainsi,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ -x^2 + 2x & \text{si } x \in ]0, 1] \end{cases}$$

Le minimum de  $f$  est donc atteint en  $x = 0$  où  $f(0) = 0$ . Le maximum est atteint en  $x = -1$  où  $f(-1) = 3$ .

**Exercice 11.** Montrons tout d'abord que  $f$  est bijective.

Soient  $x, y \in [0, 1]$  tels que  $f(x) = f(y)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ \iff \sqrt{1-x^2} &= \sqrt{1-y^2} \\ \iff 1-x^2 &= 1-y^2 \\ \iff x^2 &= y^2 \\ \iff x &= y \end{aligned}$$

car  $x, y \geq 0$ . Nous avons ainsi montré que  $f$  est injective.

Soit  $y \in [0, 1]$ , on cherche  $x \in [0, 1]$  tq  $f(x) = y$ . Posons  $x = \sqrt{1-y^2}$ . Ainsi, comme  $y \in [0, 1]$ , nous avons que  $1-y^2 \in [0, 1]$  et donc  $\sqrt{1-y^2} \in [0, 1]$ .

Nous remarquons :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(\sqrt{1-y^2}) \\
 &= \sqrt{1-(\sqrt{1-y^2})^2} \\
 &= \sqrt{1-1+y^2} \\
 &= \sqrt{y^2} \\
 &= y
 \end{aligned}$$

car  $y \geq 0$ . Nous avons ainsi montré que  $f$  est surjective.

Ainsi, nous avons montré que  $f$  est bijective.

Cherchons maintenant à déterminer l'inverse de  $f$ . Posons  $g(x) = f^{-1}(x)$ . Ainsi,

$$g = f^{-1} \iff g \circ f = f \circ g = \text{Id}$$

d'où

$$x = f(g(x)) = \sqrt{1-g^2(x)} \iff x^2 = 1-g^2(x) \iff g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

Vérifions encore que  $g \circ f(x) = x$  :

$$\begin{aligned}
 g(f(x)) &= \sqrt{1-f^2(x)} \\
 &= \sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2} \\
 &= \sqrt{1-1+x^2} \\
 &= \sqrt{x^2} \\
 &= x
 \end{aligned}$$

car  $x \geq 0$ . D'où  $g = f^{-1}$  (nous avons même dans ce cas que  $f = f^{-1}$ ).

**Exercice 12.** La fonction  $f$  n'est pas bijective car elle n'est pas injective. En effet, par exemple

$$f(2\pi) = \sin(2\pi) + 2 = 0 + 2 = \sin(3\pi) + 2 = f(3\pi)$$

et  $2\pi \neq 3\pi$ .

Séparons  $f$  en les deux fonctions

$$f' : \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \rightarrow [1, 3] : x \mapsto \sin(x) + 2$$

et

$$f'' : \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right] \rightarrow [1, 3] : x \mapsto \sin(x) + 2$$

Comme  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , nous allons poser

$$(f')^{-1} : [1, 3] \rightarrow \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] : x \mapsto \arcsin(x-2) + 2\pi$$

et

$$(f'')^{-1} : [1, 3] \rightarrow \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right] : x \mapsto -\arcsin(x-2) + 3\pi = \arcsin(2-x) + 3\pi$$

Il est facile de voir que

$$f' \circ (f')^{-1} = (f')^{-1} \circ f' = \text{Id}$$

et

$$(f'')^{-1} \circ f'' = f'' \circ (f'')^{-1} = \text{Id}.$$

Ceci montre que  $f'$  et  $f''$  sont bijectives, et que leurs inverses sont bien les fonctions proposées  $(f')^{-1}$  et  $(f'')^{-1}$ .

**Exercice 13.** Si  $r = 0$ , la fonction donnée par  $x^r$  est la fonction constante de valeur 1 avec  $D(f) = \mathbb{R}$ ; elle n'est pas bijective et ne possède donc pas de réciproque.

Si  $r \in \mathbb{Q}^*$ , il existe  $m, n \in \mathbb{N}$  tels que  $r = \frac{m}{n}$  avec  $m$  et  $n$  premiers entre eux. Ainsi, si  $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$  alors  $f^{-1}(x) = x^{\frac{n}{m}}$ . En effet,

$$f \circ f^{-1}(x) = \left(x^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{nm}{mn}} = x$$

et

$$f^{-1} \circ f(x) = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{mn}{nm}} = x$$

On rappelle que pour  $n \neq 0$ , on a  $x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m$ , et  $D(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \text{ impair,} \\ \mathbb{R}_+ & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$