

Série 25

Exercice 1. Soit la fonction “racine” $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = \sqrt{x}$.

a) Démontre, en utilisant la définition (avec ε et δ), que pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, on a $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \sqrt{a}$.

b) Démontre, en utilisant la définition, que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \sqrt{a}$.

c) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction réelle définie au voisinage de a avec $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. On suppose aussi qu’il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in D$ satisfait $0 < |x - a| < \alpha$, alors $f(x) \neq b$. Démontre que dans ce cas,

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{b}.$$

d) Redémontre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0}$ et que pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ et en utilisant des suites.

Exercice 2. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \sin(\frac{1}{x}))$ à l’aide du Théorème des deux gendarmes.

Exercice 3. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2 + x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$.

Exercice 4. On inscrit dans un cercle de rayon 1 un polygone régulier à n côtés.

a) Montre que l’aire de ce polygone vaut $\frac{n}{2} \sin(\frac{2\pi}{n})$.

b) Calcule la limite de cette aire lorsque le nombre de côtés augmente.

Exercice 5. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin(x)}{x + \sin(x)}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2}$.

Exercice 6. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{\sqrt{1 - \cos(x)}}$.

Exercice 7. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$.

Exercice 8. Comment faut-il choisir les quatre nombres réels a, b, c et d pour que la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$$

passse par le point $(2; -2)$ et admette pour asymptotes les droites d’équation $x = -3$ et $y = -2x + 1$?

Exercice 9. Comment faut-il choisir les cinq nombres réels a, b, c, d et e pour que la fonction rationnelle

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x + d)(x + e)}$$

passse par le point $(-5; 20)$ et admette pour asymptotes les droites d’équation $x = -2$, $x = 1$ et $y = 3x - 7$?