

Exercice 1. Pour s'échauffer - plan tangent

On considère la fonction $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2$.

1. Trouver l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, où $(x_0, y_0) = (2, 1)$.
2. Donner un vecteur normal n au graphe de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Correction.

1. On calcule $\nabla f(x, y) = (4x, 8y)$ d'où $\nabla f(2, 1) = (8, 8)$. L'équation du plan tangent en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (2, 1, 12)$ est

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle = 12 + \langle (8, 8), (x - 2, y - 1) \rangle = 8x + 8y - 12.$$

2. Un vecteur normal au graphe est donné par

$$n = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right) = (-8, -8, 1).$$

Exercice 2. Un peu plus sur les plans tangents

On considère la surface S de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}.$$

1. Déterminer l'équation du plan tangent à S au point $(2, 3, 6)$.
2. En quels points de S , le plan tangent est-il parallèle au plan Π d'équation $z = -\frac{1}{6}x + y + \frac{5}{3}$?
Donner l'équation du plan tangent.
3. Déterminer l'équation des plans tangents à S et qui passent par les points $P = (4, 2, 8)$ et $Q = (6, 0, 2)$.

Correction.

1. On vérifie d'abord que $(2, 3, 6) \in S$ puisque $6 = 2 \cdot 3$. La surface S est définie comme le graphe de la fonction $f(x, y) = xy$ dont le gradient est $\nabla f(x, y) = (y, x)$. L'équation du plan tangent à S au point $(2, 3, 6)$ est donc donné par

$$z = f(2, 3) + \langle \nabla f(2, 3), (x - 2, y - 3) \rangle = 6 + 3(x - 2) + 2(y - 3) = 3x + 2y - 6.$$

2. Un plan est défini par un vecteur normal et un point. Un vecteur normal de Π est $(\frac{1}{6}, -1, 1)$. La normale du plan tangent dans un point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ de S est

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right) = (-y_0, -x_0, 1).$$

Pour que les plans soient parallèles, les directions normales doivent coïncider d'où

$$y_0 = -\frac{1}{6}, x_0 = 1.$$

Le point de tangence est donc

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (1, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$$

et l'équation du plan tangent en ce point est

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle \\ &= -\frac{1}{6} + y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) \\ &= -\frac{1}{6} - \frac{1}{6}(x - 1) + 1(y + \frac{1}{6}) \\ &= -\frac{1}{6}x + y + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3. Soit $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ un point de graphe. L'équation du plan tangent au graphe en ce point est donnée par

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle = x_0 y_0 + y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) = y_0 x + x_0 y - x_0 y_0.$$

Comme P et Q doivent appartenir au plan, ils doivent satisfaire l'équation du plan et on obtient les conditions

$$\begin{cases} x_0 y_0 + y_0(4 - x_0) + x_0(2 - y_0) = 8, \\ x_0 y_0 + y_0(6 - x_0) - x_0 y_0 = 2. \end{cases}.$$

La deuxième équation donne $y_0 = 2/(6 - x_0)$. En remplaçant dans la première et en résolvant l'équation en x_0 on obtient les deux solutions $x_0 = 5$ et $x_0 = 4$ auxquelles correspondent respectivement les ordonnées $y_0 = 2$ et $y_0 = 1$. Donc on obtient les deux plans tangents :

$$z = -10 + 2x + 5y \quad \text{tangent en } (5, 2, 10),$$

$$z = -4 + x + 4y \quad \text{tangent en } (4, 1, 4).$$

Exercice 3. Plan tangent à une surface décrite implicitement

Soit la surface S de $\mathbb{R}^3$ définie "implicitement" par

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x^2 + 3y - 4e^z = 0\}.$$

Soit z_0 tel que $(1, 2, z_0) \in S$.

- Déterminer la valeur de z_0 .
- Donner l'équation du plan tangent à S au point $(1, 2, z_0)$.

Indication : décrire la surface S comme le graphe d'une fonction f de variables x et y dans un voisinage de $(1, 2)$.

Correction.

- Comme $(1, 2, z_0)$ doit appartenir à S , on doit avoir

$$-2 + 6 - 4e^{z_0} = 0 \Leftrightarrow e^{z_0} = 1 \Leftrightarrow z_0 = 0.$$

- Pour trouver l'équation du plan, on décrit d'abord S (localement) comme un graphe de fonction en isolant z : $(x, y, z) \in S \Leftrightarrow e^z = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}y \Leftrightarrow z = \ln(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}y)$ avec $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}y > 0$. Dans un voisinage de $(1, 2)$, on a bien $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}y > 0$ puisque $-\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 2 = 1 > 0$ et $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}y$ est une fonction continue.

On décrit donc S proche de $(1, 2, 0)$ comme le graphe de la fonction $f(x, y) = \ln(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}y)$ et le plan tangent à S en $(1, 2, 0)$ est donné par

$$z = f(1, 2) + \langle \nabla f(1, 2), (x - 1, y - 2) \rangle.$$

On calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-x}{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}y}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3}{-2x^2 + 3y}$$

d'où $\nabla f(1, 2) = (-1, \frac{3}{4})$ et donc l'équation du plan est

$$z = -x + \frac{3}{4}y - \frac{1}{2}.$$

Exercice 4. Dérivées directionnelles

Pour les fonctions ci-dessous différentiables en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et les directions $v \in \mathbb{R}^2$ données, calculer $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$.

Indication : utiliser la formule vue au cours pour une fonction différentiable.

1. $f(x, y) = \log(x^2 + y)$, $(x_0, y_0) = (2, 1)$, et $v = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.
2. $f(x, y) = (1 + x)y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
3. $f(x, y) = e^{x^2 - y}$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $v = (\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$

Correction.

1. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y} \Rightarrow \nabla f(2, 1) = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2, 1) = \langle \nabla f(2, 1), v \rangle = \left\langle \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \right\rangle = \frac{16}{25}.$$

2. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2(1 + x)y \Rightarrow \nabla f(0, 1) = (1, 2)$$

Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 1) = \langle \nabla f(0, 1), v \rangle = \left\langle (1, 2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

3. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^{x^2 - y}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -e^{x^2 - y} \Rightarrow \nabla f(1, 1) = (2, -1)$$

Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 1) = \langle \nabla f(1, 1), v \rangle = \left\langle (2, -1), \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right) \right\rangle = -\frac{2}{13}.$$

Exercice 5. Fonction continûment différentiable

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur en $(0, 0)$.
2. Calculer les dérivées partielles de f en $(0, 0)$
3. Montrer que f est différentiable en $(0, 0)$.
4. Calculer les dérivées partielles de f en $(x, y) \neq (0, 0)$.
5. Déterminer si f est continûment différentiable en $(0, 0)$.

Correction.

1. La continuité en $(0, 0)$ se montre en passant en coordonnées polaires. On a

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{r^4 \cos(\varphi)^3 \sin(\varphi)}{r^2} \right| \leq r^2,$$

et donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y) - f(0, 0)| \leq \lim_{r \rightarrow 0} r^2 = 0$.

2. En $(0, 0)$ on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0.$$

3. Il suffit de vérifier que

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - \langle \nabla f(0, 0), (h_1, h_2) \rangle}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

En coordonnée polaire $(h_1, h_2) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, on a

$$\left| \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - \langle \nabla f(0, 0), (h_1, h_2) \rangle}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| = \left| \frac{r^4 \cos(\varphi)^3 \sin(\varphi)}{r^3} \right| \leq r \rightarrow 0 \text{ si } r \rightarrow 0^+$$

et donc f est différentiable en $(0, 0)$.

4. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} - \frac{2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2},$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} - \frac{2x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

5. On doit montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0, 0)$, c'est-à-dire :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

et

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

En passant en coordonnée polaire $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, on observe que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \right| \leq 5r \rightarrow 0 \text{ si } r \rightarrow 0^+$$

et

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \right| \leq 3r \rightarrow 0 \text{ si } r \rightarrow 0^+$$

La fonction est donc continûment différentiable en $(0, 0)$ puisque les dérivées partielles y sont continues en $(0, 0)$.

Exercice 6. Fonction continûment différentiable

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Déterminer si f est continûment différentiable en $(0, 0)$.

Correction.

On doit montrer que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

et

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Calcul des dérivées partielles en $(0, 0)$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2 + 0} - 0}{h} = 0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0 + h^2} - 0}{h} = 0.$$

Calcul des dérivées partielles pour $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^4 y^3 + 3x^2 y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^3 y^4 + 3x^5 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

On cherche à vérifier directement le critère des deux gendarmes sous forme polaire :

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| &= \left| \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \right| = \left| \frac{r^7 (\cos^4(\theta) \sin^3(\theta) + 3 \cos^2(\theta) \sin^5(\theta))}{r^4} \right| \\ &= r^3 |\cos^4(\theta) \sin^3(\theta) + 3 \cos^2(\theta) \sin^5(\theta)| \leq 4r^3 \rightarrow 0 \text{ si } r \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

Un calcul identique permet de montrer que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) :$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| &= \left| \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \right| = \left| \frac{r^7 (\cos^3(\theta) \sin^4(\theta) + 3 \cos^5(\theta) \sin^2(\theta))}{r^4} \right| \\ &= r^3 |\cos^3(\theta) \sin^4(\theta) + 3 \cos^5(\theta) \sin^2(\theta)| \leq 4r^3 \rightarrow 0 \text{ si } r \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

Les dérivées partielles sont donc continues en $(0, 0)$ et donc f est continûment différentiable en $(0, 0)$.