

Exercice 1. Pour s'échauffer - plan tangent

On considère la fonction $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2$.

1. Trouver l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, où $(x_0, y_0) = (2, 1)$.
2. Donner un vecteur normal n au graphe de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Exercice 2. Un peu plus sur les plans tangents

On considère la surface S de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}.$$

1. Déterminer l'équation du plan tangent à S au point $(2, 3, 6)$.
2. En quels points de S , le plan tangent est-il parallèle au plan Π d'équation $z = -\frac{1}{6}x + y + \frac{5}{3}$?
Donner l'équation du plan tangent.
3. Déterminer l'équation des plans tangents à S et qui passent par les points $P = (4, 2, 8)$ et $Q = (6, 0, 2)$.

Exercice 3. Plan tangent à une surface décrite implicitement

Soit la surface S de $\mathbb{R}^3$ définie "implicitement" par

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x^2 + 3y - 4e^z = 0\}.$$

Soit z_0 tel que $(1, 2, z_0) \in S$.

1. Déterminer la valeur de z_0 .
2. Donner l'équation du plan tangent à S au point $(1, 2, z_0)$.

Indication : décrire la surface S comme le graphe d'une fonction f de variables x et y dans un voisinage de $(1, 2)$.

Exercice 4. Dérivées directionnelles

Pour les fonctions ci-dessous différentiables en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et les directions $v \in \mathbb{R}^2$ données, calculer $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$.

Indication : utiliser la formule vue au cours pour une fonction différentiable.

1. $f(x, y) = \log(x^2 + y)$, $(x_0, y_0) = (2, 1)$, et $v = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.
2. $f(x, y) = (1 + x)y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
3. $f(x, y) = e^{x^2-y}$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $v = (\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$.

Exercice 5. Fonction continûment différentiable

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur en $(0, 0)$.
2. Calculer les dérivées partielles de f en $(0, 0)$
3. Montrer que f est différentiable en $(0, 0)$.
4. Calculer les dérivées partielles de f en $(x, y) \neq (0, 0)$.
5. Déterminer si f est continûment différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 6. Fonction continûment différentiable

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Déterminer si f est continûment différentiable en $(0, 0)$.

Réponses

Exercice 1.

1. $z = 8x + 8y - 12$.
2. $n = (-8, -8, 1)$.

Exercice 2.

1. $z = 3x + 2y - 6$.
2. Point du plan tangent : $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (1, -1/6, -1/6)$, équation du plan tangent : $z = -x/6 + y + 1/6$.
3. Deux plans possibles : $z = 2x + 5y - 10$ et $z = x + 4y - 4$.

Exercice 3.

1. $z_0 = 0$.
2. $z = -x + 3y/4 - 1/2$.

Exercice 4.

1. $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \frac{16}{25}$,
2. $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \frac{3}{\sqrt{2}}$,
3. $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = -\frac{2}{13}$.