

Exercice 1. Pour s'échauffer - dérivées partielles

Pour chaque fonction ci-dessous, calculer son gradient:

1. $f(x, y) = x^2 e^{xy} - y.$
2. $f(x, y) = \cos\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right).$
3. $f(x, y) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1+y^2}}.$

Correction.

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^{xy} + x^2 ye^{xy}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 e^{xy} - 1$
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2} \sin\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2} \sin\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right)$
3. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -y \sqrt{\frac{1+x^2}{(1+y^2)^3}}$

Exercice 2. Dérivées partielles et continuité

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que $\nabla f(0, 0)$ existe, et que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Correction.

Commençons par étudier la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$

Test le long des droites en coordonnées polaires pour θ fixé : On a

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2(\cos \theta + \sin \theta)^2}{r^2} = (\cos \theta + \sin \theta)^2.$$

Vu que cette limite dépend de θ , la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas car la valeur change en fonction de θ . En particulier, f ne peut pas être continue en $(0, 0)$.

Calculons les dérivées partielles en $(0, 0)$.

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(t+0)^2}{t^2+0^2} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(0+t)^2}{0^2+t^2} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0, \end{aligned}$$

ainsi, les dérivées partielles de f existent en $(0, 0)$.

Exercice 3. Fonction différentiable

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y + xy \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que f est différentiable en $(0, 0)$.

Correction.

Calcul des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t + 0 + t \cdot 0 \cdot \sin\left(\frac{1}{|t|}\right) - 0}{t} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 + t + 0 \cdot t \cdot \sin\left(\frac{1}{|t|}\right) - 0}{t} = 1.$$

Définition de différentiabilité :

On doit vérifier si

$$\begin{aligned} & \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - \langle \nabla f(0, 0), (h_1, h_2) \rangle}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{h_1 + h_2 + h_1 h_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\right) - 0 - \langle (1, 1), (h_1, h_2) \rangle}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{h_1 h_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\right)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \stackrel{?}{=} 0. \end{aligned}$$

Passons en coordonnées polaires : $(h_1, h_2) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

On applique directement le critère des deux gendarmes. On a

$$0 \leq \left| \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta \sin\left(\frac{1}{r}\right)}{r} \right| \leq r \left| \sin\left(\frac{1}{r}\right) \right| \leq r \rightarrow 0.$$

Ainsi, on a bien

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - \langle \nabla f(0, 0), (h_1, h_2) \rangle}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0,$$

et f est différentiable en 0.

Exercice 4. Fonction différentiable

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Déterminez si f est différentiable en $(0, 0)$.

Correction.

Calcul des dérivées partielles

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^5 + t \cdot 0}{(t^2 + 0)^2} - 0}{t} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{0 + 0 \cdot t^4}{(0 + t^2)^2} - 0}{t} = 0 \end{aligned}$$

Définition de différentiable

On doit vérifier si

$$\begin{aligned} & \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (h_1, h_2) \rangle}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h_1^5 - h_1 h_2^4}{(h_1^2 + h_2^2)^2} - 0 - \langle (1,0), (h_1, h_2) \rangle}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{h_1^5 - h_1 h_2^4 - h_1(h_1^2 + h_2^2)^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{5}{2}}} \stackrel{?}{=} 0. \end{aligned}$$

Passons en coordonnées polaires : $(h_1, h_2) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

Test le long des droites pour θ fixé

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^5 \cos^5 \theta - r^5 \cos \theta \sin^4 \theta - r^5 \cos \theta}{r^5} = \cos^5 \theta - \cos \theta \sin^4 \theta - \cos \theta.$$

Vu que la limite dépend de θ et peut donc avoir des valeurs différentes, la limite

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (h_1, h_2) \rangle}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

n'existe pas et f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 5. Fonction différentiable

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = y |xy^3 - \sin(y) \cos(y)|$$

Déterminez si f est différentiable en $(0,0)$.

Correction.

Calcul des dérivées partielles

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 \cdot |t \cdot 0 - \sin(0) \cos(0)|}{t} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot |0 \cdot t^3 - \sin(t) \cos(t)|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} |\sin(t) \cos(t)| = 0 \end{aligned}$$

Définition de différentiable : On doit vérifier si

$$\begin{aligned} & \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (h_1, h_2) \rangle}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{h_2 |h_1 h_2^3 - \sin(h_2) \cos(h_2)|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \stackrel{?}{=} 0 \end{aligned}$$

Passons en coordonnées polaires : $(h_1, h_2) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Ici comme l'expression est complexe, prenons le temps de vérifier si la limite a une chance d'exister :

Test le long des droites - θ fixé

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r \sin \theta |r^4 \cos \theta \sin^3 \theta - \sin(r \sin \theta) \cos(r \sin \theta)|}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \sin \theta |r^4 \cos \theta \sin^3 \theta - \sin(r \sin \theta) \cos(r \sin \theta)| = 0 \end{aligned}$$

La limite le long de chaque droite étant la même, on peut essayer d'appliquer les deux gendarmes

:

Application du critère des deux gendarmes :

$$0 \leq \left| \frac{r \sin \theta |r^4 \cos \theta \sin^3 \theta - \sin(r \sin \theta) \cos(r \sin \theta)|}{r} \right| \leq \underbrace{|\sin \theta|}_{\leq 1} \left(\underbrace{r^4}_{\leq 1} \underbrace{|\cos \theta \sin^3 \theta|}_{\leq 1} + \underbrace{|\sin(r \sin \theta)|}_{\leq r|\sin \theta|} \underbrace{|\cos(r \sin \theta)|}_{\leq 1} \right) \leq r^4 + r \underbrace{|\sin(\theta)|}_{\leq 1} \leq r^4 + r \rightarrow 0$$

Ainsi, par le critère des deux gendarmes,

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (h_1, h_2) \rangle}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

et f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 6. Révisions - ensemble de niveaux

Pour chaque fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ci-dessous, donner son image, décrire et esquisser ses ensembles de niveaux, puis esquisser le graphe de f .

1. $f(x, y) = |x + y|$
2. $f(x, y) = x^2 + 4y^2$

Indication : l'équation cartésienne d'une ellipse de demi-axe horizontal $\frac{c}{a}$ et de demi-axe vertical $\frac{c}{b}$ est $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2$.

Correction.

1. On a $\text{Im} f = \mathbb{R}_+$. Pour trouver les ensembles de niveaux, on cherche pour $c \geq 0$, l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$|x + y| = c \Leftrightarrow x + y = \pm c \Leftrightarrow y = -x \pm c.$$

Les ensembles de niveaux sont donc des paires de droites de pente -1 passant par respectivement par le point $(0, c)$ et $(0, -c)$.

Pour esquisser le graphe de la fonction, on construit les ensembles de niveaux pour quelques c (par exemple $c = 0, 1, 2$) et on construit le graphe "couche par couche" (un peu comme pour une imprimante 3D) en élevant chaque ensemble de niveaux associé à c à la hauteur $z = c$ dans le repère $Oxyz$. On obtient ainsi des droites dans l'espace qui "portent le graphe de f " (ces droites sont en fait l'intersection de G_f avec les plans $z = c$ pour chaque c).

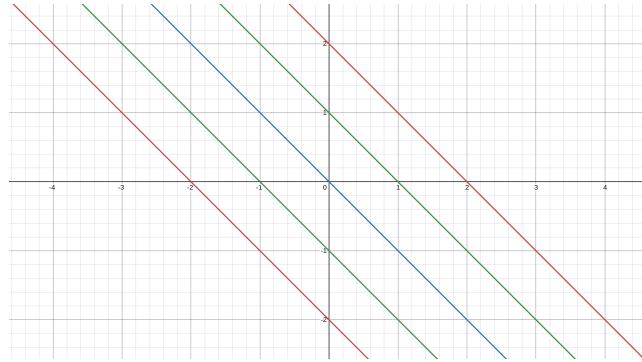


Figure 1: Ensembles de niveaux pour $f(x, y) = |x + y|$, pour $c = 0, 1, 2$.

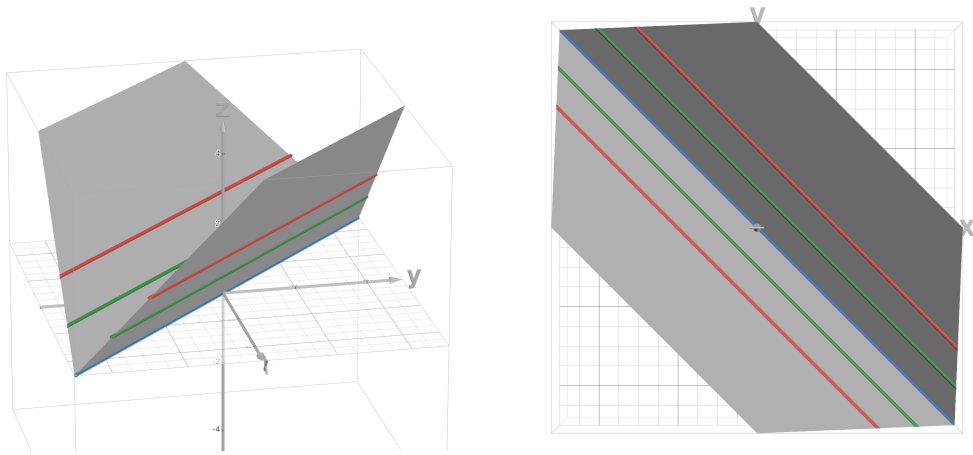


Figure 2: Graphe de $f(x, y) = |x + y|$ et graphe de $f(x, y) = |x + y|$ en vue de haut. On observe les ensembles de niveaux "à plat".

2. On a $\text{Im} f = \mathbb{R}_+$. Pour trouver les ensembles de niveaux, on cherche pour $c \geq 0$, l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$x^2 + 4y^2 = c.$$

Pour $c > 0$, les ensembles de niveaux sont des ellipses de demi-axe horizontale $\sqrt{c}$ et de demi-axe verticale $\frac{\sqrt{c}}{2}$. Pour $c = 0$, c'est le point $(0, 0)$.

Pour esquisser la fonction, on construit les ensembles de niveaux pour $c = 0, 1, 4, 9$ et on construit le graphe couche par couche en élevant chaque ensemble de niveau associé à c à l'altitude $z = c$ (les "couches successives" sont les intersections du plan $z = c$ avec le graphe de la fonction).

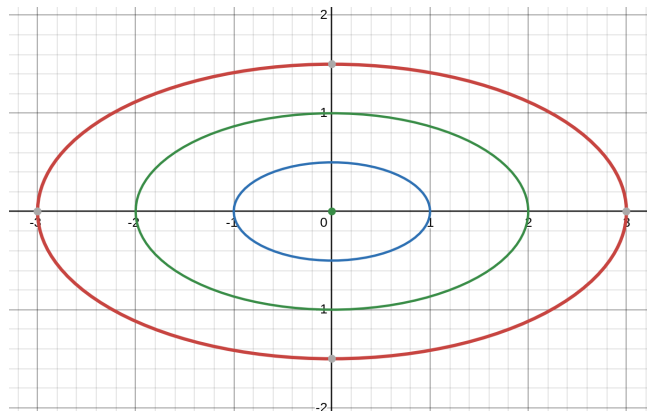


Figure 3: Ensembles de niveaux pour $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ pour $c = 0, 1, 4, 9$

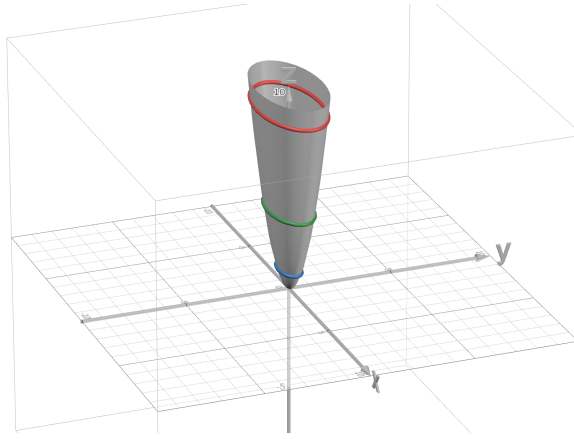


Figure 4: Graphe de $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

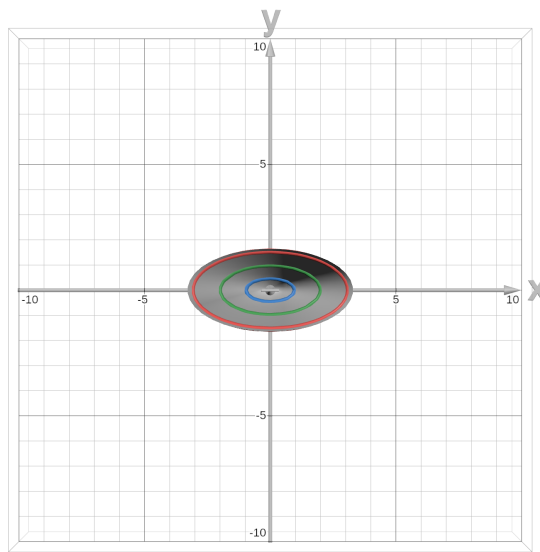


Figure 5: Graphe de $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ en vue de haut. On observe les ensembles de niveaux "à plat".

Exercice 7. Révisions - continuité

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en $(0, 0)$.
2. Montrer que pour tout $\tilde{y} \neq 0$, f n'est pas continue en $(0, \tilde{y})$.

Suggestion : pour le point (2), construire deux suites $(x_k, \tilde{y})$ telles que x_k tend vers zéro quand $k \rightarrow +\infty$, mais telles que $f(x_k, \tilde{y})$ ne converge pas vers la même valeur.

Correction.

1. Calculons $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Passons en coordonnées polaires : $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Test le long des droites pour θ fixé :

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r \sin(\theta)}{2 + \sin\left(\frac{1}{r \cos(\theta)}\right)} & \text{si } \theta \neq \frac{\pi}{2} \text{ et } \theta \neq \frac{3\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que vu que le sinus est toujours entre -1 et 1 , le dénominateur est toujours plus grand que 1 , donc

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r \sin(\theta)}{2 + \sin\left(\frac{1}{r \cos(\theta)}\right)} = 0.$$

Vu qu'on obtient la même chose pour tout θ , on passe à l'utilisation du critère des deux gendarmes.

On a

$$|f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) - 0| = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0^+} \left| \frac{r \sin(\theta)}{2 + \sin\left(\frac{1}{r \cos(\theta)}\right)} \right| & \text{si } \theta \neq \frac{\pi}{2} \text{ et } \theta \neq \frac{3\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme mentionné plus haut, on a $2 + \sin\left(\frac{1}{r \cos(\theta)}\right) \geq 1$ et donc $\frac{1}{2 + \sin\left(\frac{1}{r \cos(\theta)}\right)} \leq 1$. Ainsi,

$$|f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) - 0| \leq r |\sin(\theta)| \leq r \rightarrow 0.$$

et on a bien

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

d'où f est continue en $(0,0)$.

Remarques Comme on nous demande de montrer la continuité, on aurait pu éviter l'étape où on teste les directions car on s'attend à ce que la limite soit $f(0,0) = 0$.

De plus, ici, on aurait pu utiliser le critère des deux gendarmes en coordonnées cartésiennes :

On a

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \begin{cases} \frac{|y|}{\left|2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Observons que pour $x \neq 0$, $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \in [-1, 1]$, donc, $2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \in [1, 3]$. Ainsi, $\left|2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1$ et

$$\frac{|y|}{\left|2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|} \leq |y|.$$

Vu que trivialement, $0 \leq |y|$, on déduit

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq |y|.$$

Vu que $\lim_{y \rightarrow 0} |y| = 0$, on a par le critère des deux gendarmes

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0),$$

c'est-à-dire, f est continue en 0 .

2. Soit pour $k \geq 1$,

$$a_k = \left(\frac{1}{2k\pi}, \tilde{y}\right) \quad b_k = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \tilde{y}\right).$$

Alors, $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = (0, \tilde{y})$, et

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow +\infty} f(a_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{y}}{2 + \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2k\pi}}\right)} = \frac{\tilde{y}}{2} \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} f(b_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{y}}{2 + \sin\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\right)} = \frac{\tilde{y}}{3}\end{aligned}$$

Vu que $\tilde{y} \neq 0$, ces deux limites sont différentes et donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,\tilde{y})} f(x,y)$ n'existe pas.