

Exercice 1. Pour s'échauffer - dérivées partielles

Pour chaque fonction ci-dessous, calculer son gradient:

1. $f(x, y) = x^2 e^{xy} - y.$
2. $f(x, y) = \cos\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right).$
3. $f(x, y) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1+y^2}}.$

Exercice 2. Dérivées partielles et continuité

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que $\nabla f(0, 0)$ existe, et que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 3. Fonction différentiable

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y + xy \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que f est différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 4. Fonction différentiable

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Déterminez si f est différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 5. Fonction différentiable

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = y |xy^3 - \sin(y) \cos(y)|$$

Déterminez si f est différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 6. Révisions - ensemble de niveaux

Pour chaque fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ci-dessous, donner son image, décrire et esquisser ses ensembles de niveaux, puis esquisser le graphe de f .

1. $f(x, y) = |x + y|$
2. $f(x, y) = x^2 + 4y^2$

Indication : l'équation cartésienne d'une ellipse de demi-axe horizontal $\frac{c}{a}$ et de demi-axe vertical $\frac{c}{b}$ est $a^2 x^2 + b^2 y^2 = c^2$.

Exercice 7. Révisions - continuité

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en $(0, 0)$.
2. Montrer que pour tout $\tilde{y} \neq 0$, f n'est pas continue en $(0, \tilde{y})$.

Suggestion : pour le point (2), construire deux suites $(x_k, \tilde{y})$ telles que x_k tend vers zéro quand $k \rightarrow +\infty$, mais telles que $f(x_k, \tilde{y})$ ne converge pas vers la même valeur.

Réponses

Exercice 1.

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3e^{xy} - 1$
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2} \sin\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2} \sin\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right)$
3. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -y\sqrt{\frac{1+x^2}{(1+y^2)^3}}$

Exercice 4.

f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 5.

f est différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 6

1. Les ensembles de niveaux sont des droites.
2. Les ensembles de niveaux sont des ellipses.