

Exercices – Semaine 4

Exercice 1.

On pourra procéder en quotientant en deux temps pour répondre aux questions suivantes.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[t]/(t^2 + t + 1, 2)$ est un corps. Combien d'éléments il y a-t-il dans ce corps ?
2. Soit k un corps. Montrer que $k[x, y, z]/(x - y^3 - y^2, y^3 + z^4) \cong k[y, z]/(y^3 + z^4)$.

Exercice 2.

Soit R un anneau commutatif. Les anneaux de gauche sont des anneaux de groupes.

- (a) Montrer que $R[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] \cong R[t]/(t^n - 1)$.
- (b) Montrer que $R[\mathbb{Z}] \cong R[x, y]/(xy - 1) \cong R[t, t^{-1}]$.

Réfléchissez où doivent être envoyés les éléments des groupes/les variables.

Exercice 3.

Soit A un anneau commutatif. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]/(5 + 2\sqrt{7}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

On pourra commencer par identifier le noyau de l'unique homomorphisme d'anneaux $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{7}]/(5 + 2\sqrt{7})$.

Exercice 4.

Soit $1 \neq \epsilon \in \mathbb{C}$ une racine cubique de l'unité.

- (a) Montrer que $\mathbb{Z}[\epsilon] \cong \mathbb{Z}[t]/(t^2 + t + 1)$.
- (b) Montrer que $\mathbb{Q}[\epsilon] = \text{Frac}(\mathbb{Z}[\epsilon])$.
- (c) Montrer que la dimension de $\mathbb{Q}[\epsilon]$ en tant que $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel est 2.

Exercice 5.

Considérons l'homomorphisme

$$\xi_p: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[t] & \rightarrow & \mathbb{F}_p[t] \\ \sum_{i=0}^n a_i t^i & \mapsto & \sum_{i=0}^n [a_i] t^i \end{array}$$

qui envoie un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ au polynôme obtenu par réduction des coefficients mod p . Soit $f(t)$ un polynôme dans $\mathbb{F}_p[t]$ et $g(t)$ une pré-image par ξ_p . Montrez que la pré-image de l'idéal $((f(t)))$ est $(p, g(t))$.

Exercice 6 (Fonctions polynomiales.).

Soit A un anneau commutatif et $\mathcal{F}(A)$ l'anneau des fonctions $\varphi: A \rightarrow A$ où la somme et le produit sont définis dans l'ensemble d'arrivée (par exemple $(\varphi \cdot \phi)(a) = \varphi(a) \cdot \phi(a)$). On considère l'évaluation comme application $\text{ev}: A[t] \rightarrow \mathcal{F}(A)$. L'évaluation d'un polynôme f est donc la fonction polynomiale $\text{ev}(f)$ définie par $\text{ev}(f)(a) = \text{ev}_a(f) = f(a)$.

- (a) Montrer que l'évaluation est un homomorphisme d'anneaux.
- (b) Montrer que si A est fini, alors l'évaluation n'est pas injective.
- (c) Montrer que si A est intègre et infini, alors l'évaluation est injective.