Exercice 1. Comme au cours, définissons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = ax_n$ (et on a $x_n = a^n$). *Si* cette suite converge, alors sa limite x satisfait $x = ax$, c'est-à-dire $x(1-a) = 0$. Si $a \neq 1$, la seule limite rélle possible est $x = 0$. Considérons maintenant les différents cas selon la valeur de a.

- Si $a = 1$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante 1, et sa limite est $x = 1$.
- Si $-1 < a < 1$, on peut définir les suites $u_n := -|a|^n$ et $v_n := |a|^n$. Comme $0 \leq v_n < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ par un exemple du cours. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)\cdot v_n = -\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq x_n \leq v_n$, on conclut par le théorème des deux gendarmes que la suite des a^n converge vers 0.
- Si $a = -1$, alors la limite n'existe pas (exemple du cours).
- Pour $a > 1$, montrons que la suite des a^n tend vers $+\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$, et définissons $b := \frac{1}{a}$ qui satisfait $0 \leq b < 1$. Par le cours, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 0$, donc pour $\varepsilon := \frac{1}{A}$, il existe N tel que
$$\frac{1}{a^n} = b^n = |b^n - 0| < \varepsilon = \frac{1}{A} \qquad \text{pour tout } n \geq N.$$
Ceci est équivalent à dire qu'il existe N tel que $a^n > A$ pour tout $n \geq N$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.
- Si $a < -1$, on définit $b := |a| > 1$, et on considère les sous-suites (a^{2n}) et (a^{2n+1}) de (a^n). La sous-suite (a^{2n}) est une sous-suite de (b^n) et qui tend donc vers $+\infty$ par le point précédent ; la sous-suite (a^{2n+1}) est une sous-suite de $(-b^n)$ qui tend vers $-\infty$ car
$$\lim_{n\to+\infty} -b_n = \lim_{n\to+\infty} (-1)\cdot b_n = -\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty.$$
Puisque (a^n) a deux-sous-suites qui tendent vers des limites différentes, la suite (a^n) diverge (et ne tend ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$).

Exercice 2. Dans cet exercice, afin de ne pas trop alourdir le raisonnement, nous nous permettrons d'être un peu moins formel dans les démonstrations par récurrence.

a) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7$. La seule possibilité pour la limite est la solution de l'équation $x = 2x+1$ qui est -1. Or la suite est minorée par 0 (car $x_0 = 0 \geq 0$ et par récurrence, pour $n \geq 1$, on a $x_n = 2x_{n-1}+1 \geq 1 > 0$) donc elle ne peut pas converger. De plus, elle et strictement croissante : en effet, $x_1 - x_0 = 1 > 0$, et par récurrence, $x_n - x_{n-1} = 2x_{n-1} + 1 - x_{n-1} = x_{n-1} + 1 \geq 1$ car la suite est minorée par 0. Comme elle ne converge pas, elle ne peut pas être majorée, et sa croissance implique alors qu'elle tend vers $+\infty$ par le cours.

b) $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{41}{16}$, $x_3 = \frac{1937}{256}$. Comme l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'a pas de solution, il n'y a pas de candidat à la limite ; la suite ne converge donc pas. Par contre, elle a l'air croissante, vérifions-le : $x_n - x_{n-1} = x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1$; la fonction quadratique $x^2 - x + 1$ ne s'annule jamais (car $\Delta = -3 < 0$) et est donc toujours positive (graphe en "$\cup$"). Par conséquent, $x_n - x_{n-1} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et la suite est croissante ; elle n'est pas majorée (sinon, elle convergerait), donc elle tend vers $+\infty$ par un résultat du cours.

c) $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{5}{4}$, $x_3 = \frac{41}{40}$, $x_4 = \frac{3281}{3280}$. Les solution de l'équation $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ sont 1 et -1. Donc la limite, si elle existe, est soit 1, soit -1. On montre par récurrence que la suite est minorée par 1 : on a $x_1 = 2 \geq 1$, et quel que soit $n \geq 2$,
$$\begin{aligned} x_n \geq 1 &\iff \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - 1 \geq 0 \\ &\iff x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} - 2 \geq 0 \\ &\overset{x_{n-1}>0}{\iff} x_{n-1}^2 - 2x_{n-1} + 1 \geq 0 \\ &\iff (x_{n-1} - 1)^2 \geq 0 \qquad \text{qui est toujours vrai.} \end{aligned}$$
De plus la suite est décroissante car $x_2 - x_1 = -\frac{3}{4} < 0$, et quel que soit $n \geq 2$,
$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} \leq 0 &\iff \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - x_{n-1} \leq 0 \\ &\iff \frac{1}{2}\left(-x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right) \leq 0 \\ &\iff \frac{1}{x_{n-1}} \leq x_{n-1} \qquad \text{toujours vrai car } x_{n-1} \geq 1, \end{aligned}$$

et ainsi la suite est décroissante. La décroissance et la minoration impliquent la convergence de la suite ; comme les deux seules possibilités pour la limite sont 1 ou -1, on en déduit que la limite est 1.

d) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, cette suite est la suite constante 1, de limite 1.

Exercice 3.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 2$ par le résultat du cours sur les limites de suites rationnelles.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{5}{n}-n}{10-\frac{1}{n}} = -\infty$ par le résultat du cours sur les limites de suites rationnelles.

c) On a $\lim\limits_{2n+1\to+\infty} -\dfrac{2n+1}{(2n+1)+1} = -1$ et $\lim\limits_{2n\to+\infty} \dfrac{2n}{2n+1} = 1$ par le résultat du cours sur les limites de suites rationnelles.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède donc une sous-suite $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers -1, et une sous-suite $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$qui converge vers 1, des limites différentes : la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

d) On a $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq x_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}} = \sqrt{0} = 0$$

par l'exercice sur les limites de racines de suite et sur le résultat du cours sur la limite de $\frac{1}{n}$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
Par le théorème des deux gendarmes, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

e) Comme $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, on a $-\frac{1}{n} \leq x_n \leq \frac{1}{n}$. Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ par le théorème des deux gendarmes.

f) Utilisons que $n > 0$ pour écrire (astuce classique !)

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+6n} - n &= \left(\sqrt{n^2+6n} - n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+6n}+n}{\sqrt{n^2+6n}+n} \\ &= \frac{6n}{\sqrt{n^2(1+\frac{6}{n})}+n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1} = \frac{6}{\sqrt{\frac{6}{n}+1}+1}\end{aligned}$$

Comme — pour des suites qui convergent — la limite d'un quotient est le quotient des limites, la limite d'une constante est une constante, la limite d'une somme est la somme des limites, et la limite d'une racine est la racine de la limite, on peut écrire

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{\sqrt{\frac{6}{n}+1}+1} = \frac{6}{\sqrt{1}+1} = 3.$$

Exercice 4. On observe(!) que $u_n = \dfrac{2\sqrt{n^2+1}-n+1}{3n}$. Avec la "technique habituelle" de mise en évidence du "terme du plus grand degré" au numérateur et au dénominateur, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1+\frac{1}{n}\right)}{3n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1+\frac{1}{n}}{3} = \frac{1}{3}$$

en utilisant que la limite d'un quotient est le quotient des limites, la limite d'une constante est une constante, la limite d'une somme est la somme des limites, la limite d'un produit est le produit des limites, la limite d'une racine est la racine de la limite, ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Exercice 5. Pour les trois premiers items ci-dessous, on utilise les mêmes résultats et astuces que dans les exercices précédents. Pour le dernier, on procède comme à l'exemple du cours.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \cdot \dfrac{3}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \cdot \dfrac{3}{1+0} = 3.$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n-\sqrt{n}} \cdot \dfrac{n+\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+\sqrt{n}}{n^2-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2} \cdot \dfrac{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}} = 0 \cdot \dfrac{1+0}{1-0} = 0.$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1 \cdot \frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}} = 1$

d) Comme dans l'exemple du cours, on aimerait appliquer le Théorème des deux gendarmes à la suite (d_n). Pour cela, considérons l'inégalité $n! > 5^{n-3}$ qui est vraie pour $n = 0, 1, 2, 3$, et démontrons-la par récurrence pour $n \geq 4$: l'initialisation est vraie car, $4! = 24 \geq 5 = 5^{4-3}$; si l'hypothèse $n! > 5^{n-3}$ est vraie, alors $(n+1)! = (n+1)\cdot n! \overset{\text{hyp.}}{>} (n+1)\cdot 5^{n-3} \overset{n+1\geq 5}{\geq} 5 \cdot 5^{n-3} = 5^{n-2}$. Donc pour $n \geq 0$, on a

$$0 < d_n = \frac{4^n}{n!} < 5^2 \cdot \frac{4^n}{5^n} = 25 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

Comme la suite constante $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite de terme général $v_n = 25 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n$ convergent toutes deux vers 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$ par le Théorème des deux gendarmes.

Exercice 6. En vue des deux premiers items ci-dessous, on calcule $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{7}{16}$, $a_3 = \frac{37}{64}$, ainsi que $b_0 = 2$, $b_1 = \frac{7}{4}$, $b_2 = \frac{25}{16}$, $b_3 = \frac{91}{64}$.

a) On a $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 2$. Montrons par récurrence que $c_n = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, on a bien $c_0 = 2$, et si $c_n = 2$, on a $a_n + b_n = 2$ et donc

$$c_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{3(a_n+b_n)+2}{4} \overset{\text{hyp.}}{=} \frac{3\cdot 2+2}{4} = 2$$

ce qui conclut la récurrence : c_n est bien la suite constante $(2)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) On a $d_0 = 2$, $d_1 = \frac{3}{2}$, $d_2 = \frac{9}{8}$, $d_3 = \frac{27}{32}$. Montrons par récurrence que $d_n = 2 \cdot \frac{3^n}{4^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, comme $2 \cdot \frac{3^0}{4^0} = 2 = d_0$, l'initialisation est vérifiée. Supposons que $d_n = 2 \cdot \frac{3^n}{4^n}$, et calculons

$$d_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{3(b_n - a_n)}{4} \overset{\text{hyp.}}{=} \frac{3 \cdot 2\frac{3^n}{4^n}}{4} = 2 \cdot \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}}$$

ce qui conclut la récurrence et prouve que le terme général est bien le bon.

c) En résolvant le système $\begin{cases} a_n + b_n = c_n \\ -a_n + b_n = d_n \end{cases}$ en fonction de c_n et d_n, on obtient $b_n = \frac{1}{2}\cdot(c_n + d_n)$ ainsi que $a_n = \frac{1}{2}\cdot(c_n - d_n)$; en y substituant les expressions des suites (c_n) et (d_n) obtenues ci-dessus, on trouve

$$a_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \qquad \text{et} \qquad b_n = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

d) Comme a_n et b_n sont respectivement la somme et la différence de 2 suites convergentes (une suite constante qui converge vers 1, et une suite de terme général $2 \cdot r^n$ avec $|r| < 1$ qui converge vers 0, voir l'Exercice 1 de cette Série), a_n et b_n convergent et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$.

Exercice 7.

a) On a $a_0 = 1$, $a_1 = -5$, $a_2 = \frac{25}{19}$, $a_3 = -125$, et donc $b_0 = -2$, $b_1 = \frac{8}{5}$, $b_2 = -\frac{32}{25}$, $b_3 = \frac{128}{125}$. On observe que $r = -\frac{4}{5}$ semble convenir. Vérifions-le (sans recourir à une démonstration par récurrence !) :

$$b_{n+1} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\frac{5a_n}{3a_n-4} - 3}{\frac{5a_n}{3a_n-4}} = \frac{-4a_n+12}{3a_n-4} \cdot \frac{3a_n-4}{5a_n} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{a_n - 3}{a_n} = -\frac{4}{5} \cdot b_n.$$

b) Le calcul précédent montre que $b_n = -2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^n$. De plus, comme $a_n - a_n b_n = 3$ par définition de b_n, on a

$$a_n = \frac{3}{1-b_n} = \frac{3}{\frac{5^n}{5^n} + 2 \cdot \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{5^n}} = \frac{3 \cdot 5^n}{5^n + (-1)^n \cdot 2 \cdot 4^n}$$

c) Comme $b_n = -2 \cdot r^n$ avec $|r| = \frac{4}{5} < 1$, la suite (b_n) converge vers 0 par l'Exercice 1 de cette Série. Pour évaluer la limite de (a_n), utilisons les deux gendarmes et le fait que $5^n - 2\cdot 4^n \leq 5^n + (-1)^n \cdot 2 \cdot 4^n \leq 5^n + 2 \cdot 4^n$. Définissons $u_n = \frac{3 \cdot 5^n}{5^n + 2\cdot 4^n}$ et calculons

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^n} \cdot \frac{3}{1 + 2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n} = 1 \cdot \frac{3}{1+2\cdot 0} = 3.$$

De même, définissons $v_n = \frac{3\cdot 5^n}{5^n - 2\cdot 4^n}$ et calculons

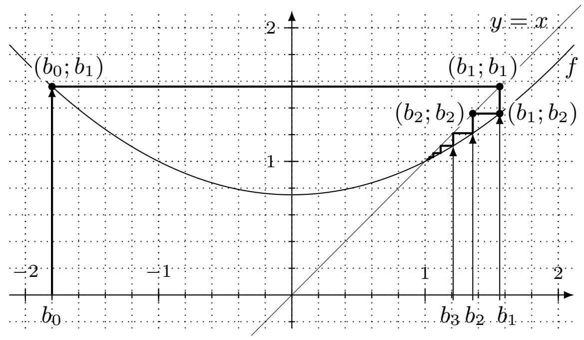
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^n}\cdot\frac{3}{1-2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n} = 1\cdot\frac{3}{1-2\cdot 0} = 3.$$

Comme $u_n \le a_n \le v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 3$ (les premiers termes de la suite seuls ne laissent pas deviner une telle limite !).

Remarque. L'énoncé laisse entendre que la suite (a_n) est bien définie. Mais rien d'autre que ce sous-entendu ne garantissait $a_n \neq \frac{4}{3}$ (pour (b_n), le fait que $a_n \neq 0$ était plus facile à établir). La forme explicite de a_n nous permet finalement de constater que la suite, uniquement déterminée par a_0 et la relation de récurrence, existe bien(!).

Exercice 8.

a) $b_0 = -\frac{9}{5} = -1.8$, $b_1 = \frac{39}{25} = 1.56$, $b_2 = \frac{849}{625} \cong 1.36$, $b_3 = \frac{473\,169}{390\,625} \cong 1.21$. La figure est complétée ci-contre. Le terme b_n de la suite, lu sur l'axe des abscisses, est envoyé sur $y = b_{n+1}$ par f ; cette ordonnée est rapportée sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite $y = x$; mais plutôt que de redescendre jusqu'à l'axe des abscisses pour ensuite remonter au $y = b_{n+2}$ suivant, on peut directement passer à la nouvelle ordonnée. Ce chemin correspond aux segments reliant le point $(b_n; b_{n+1})$ sur le graphe de f à $(b_{n+1}; b_{n+1})$ sur la droite $y = x$, puis au point suivant $(b_{n+1}; b_{n+2})$ du graphe de f. Il est possible ainsi de visualiser la convergence d'une suite définie par récurrence. Les limites de telles suites seront les abscisses des intersection des courbes $y = f(x)$ et $y = x$ puisque les candidats satisfont $x = f(x)$.



b) On a $a_0 \cong b_3$. La ligne brisée décrivant la convergence de la suite (a_n) suivra un “escalier” très proche de la ligne brisée de la suite (b_n) à partir du terme b_3. Cette suite semble décroissante et sa limite semble être $x = 1$, deux aspects confirmés par les calculs de la Série précédente.

c) Pour s'assurer de ne pas oublier de cas, utilisons un tableau (on sait que les seuls nombres réels candidats à la limite sont les solutions de $x^2 - 4x + 3 = 0$, c'est-à-dire $x = 1$ et $x = 3$). Les résultats sont obtenus en représentant les termes de la suite comme pour la suite (b_n) de l'énoncé.

	(c_n) croissante	(c_n) décroissante	(c_n) non monotone
$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1$	$c_0 \in [-1; 1]$	$c_0 \in [1; 3[$	$c_0 \in]-3; -1[$
$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 3$	$c_0 \in \{-3; 3\}$	$c_0 \in \{3\}$	–
$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$	$c_0 \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$	–	–

On remarque que si $c_0 = 1$ ou $c_0 = 3$, la suite est constante (et donc à la fois croissante et décroissante). De plus, si $c_0 \in]-3; -1[$, alors $f(c_0) = c_1 \in]1; 3[$: à partir de son 2[e] terme, la suite devient décroissante.

Exercice 9.

a) $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2} = \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\cdot\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right) = \mathrm{e}\cdot 1 = \mathrm{e}.$$

b) $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m/2} = \left(\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

c) Cette fois, faisons le changement de variable $m = \frac{n}{3}$; si n tend vers $+\infty$, alors m aussi (et inversément).

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n} = \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{3m} = \left(\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{3} = \mathrm{e}^3.$$

d) Avec le changement de variable $m = n - 1$, si n tend vers $+\infty$, alors m aussi (et réciproquement). On a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}$$
$$= \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1} = \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\cdot\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right) = \mathrm{e}\cdot(1+0) = \mathrm{e}.$$