Série 24

Exercice 1. Dans les cas suivants, détermine le domaine de définition de f, et esquisse son graphe. Trouve ensuite deux suites (x_n) et (y_n) qui convergent vers 1, mais telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$. Que peux-tu conclure sur $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$;

b) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$.

Exercice 2. Soit la fonction "valeur absolue" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = |x|$.

a) Démontre avec la définition de limite d'une fonction (c'est-à-dire avec les ε et δ) que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = |a|$.

b) Démontre avec la convergence de suites que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = |a|$.

Indication. Commence par démontrer l'inégalité $||x| - |a|| \leq |x-a|$.

Exercice 3. Opérations algébriques. À l'aide des règles de somme, multiplication, *etc.*, calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right)$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-x}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-x}{x+2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} \left| \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1} \right|$;

e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$;

f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ pour $a > 0$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x+15}}$;

i) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3-a^3}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ pour $a > 0$.

Exercice 4. Sur la parabole d'équation $y = x^2$ on choisit un point M différent de l'origine. On trace le segment $[OM]$ et sa médiatrice. Celle-ci coupe l'axe Oy en un point N. Calcule l'ordonnée de ce point en fonction des coordonnées du point M. Cette fonction est-elle définie en 0 ? Vers quelle valeur tend l'ordonnée de N lorsque M tend vers l'origine ?

Exercice 5. Démontre la proposition suivante du cours :

> **Proposition.** Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Alors
>
> $$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = b \ \text{ et } \ \lim_{x\to a^+} f(x) = b.$$

Exercice 6. [Limites de fonctions par les séries, suite.] Énonce, sans les démontrer, les versions de la Proposition suivante lorsque a ou b sont remplacés par $+\infty$ ou $-\infty$:

> **Proposition.** La fonction réelle f, définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, admet $b \in \mathbb{R}$ pour limite lorsque x tend vers a si et seulement si l'image par f de toute suite de $D(f) \setminus \{a\}$ qui tend vers a est une suite qui tend vers b. En particulier, si b et b' sont deux limites de f lorsque x tend vers a, alors $b = b'$.

Exercice 7. Démontre en utilisant des suites que $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Exercice 8. [Limites infinies.] Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. À partir de la définition d'une limite de fonction, démontre les résultats suivants.

a) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = +\infty$; **b)** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$; **c)** $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x) = +\infty$.

Remarque. En adaptant la démonstration de **b)**, on obtient facilement par exemple $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Exercice 9. Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{2}{x}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to 3^+} \left(x^2 + 3x + 4 + \dfrac{1}{x-3}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(3x^2 - x + 3\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} \left|\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}\right|$;

Exercice 10. Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-3x}{3x^2-5x+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{x^2-3x+2}$;

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{6x^4-3x^2+2}{x^3-27}$;

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x-2}{9x+7}$.

Attention. Tu ne peux pas utiliser directement les résultats sur la convergence des suites rationnelles (pourquoi ?). Il faut utiliser $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, et procéder explicitement comme dans la démonstration sur les limites de suites rationnelles.

Exercice 11. Soit $a \neq 0$. On considère l'équation quadratique $ax^2 + 3x + 1 = 0$. Quelles sont ses solutions ? Calcule la limite de ces solutions lorsque a tend vers zéro.

Exercice 12. Vrai ou faux ? Dans chaque cas donne une explication ou un contre-exemple !

a) Une fonction définie en a est aussi définie au voisinage de a.
b) Une fonction définie en a est aussi définie à droite de a.
c) Une fonction définie au voisinage de a est aussi définie à gauche de a.
d) Une fonction définie au voisinage de a est aussi définie en a.
e) Si f n'est pas définie en a, alors elle admet une asymptote verticale en ce point.
f) Si f admet une asymptote verticale en a, alors elle n'est pas définie en a.
g) Si les fonctions f et g tendent toutes deux vers 0 lorsque x tend vers a, alors la fonction f/g tend vers 1.
h) On considère une fonction f définie au voisinage de zéro. Si les deux suites $(f(1/n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(-1/n))_{n\in\mathbb{N}}$ tendent chacune vers zéro lorsque n tend vers l'infini, alors la fonction f tend vers zéro lorsque x tend vers zéro.
i) Si f définie sur $\mathbb{R}_+$ est telle que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$.

Exercice 13. Calcule $\lim\limits_{x\to\pi/2^+} \tan(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x)$, $\lim\limits_{x\to\pi/2^-} \tan(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x)$. Quelles sont les asymptotes de ces fonctions ?

Exercice 14. Que dire de $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x)$? Choisis astucieusement deux suites qui tendent vers l'infini, mais dont les images par la fonction cosinus sont différentes.