I. L'invention du calcul intégral

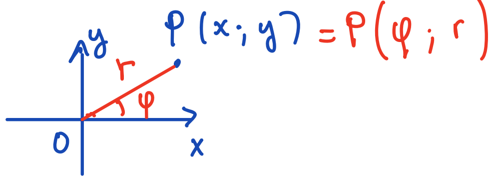
Le calcul intégral représente l'une des grandes révolutions mathématiques. On associe souvent son nom à celui de Bernhard Riemann (1826-1866), même si les idées et les concepts qui ont été nécessaire se trouvent déjà chez Cauchy (1823), Leibniz et Newton (1675), Cavalieri (1640), Kepler (1615) et ... Archimède ! Nous commencerons donc notre étude avec un exemple de ce scientifique grec de Syracuse (-250).

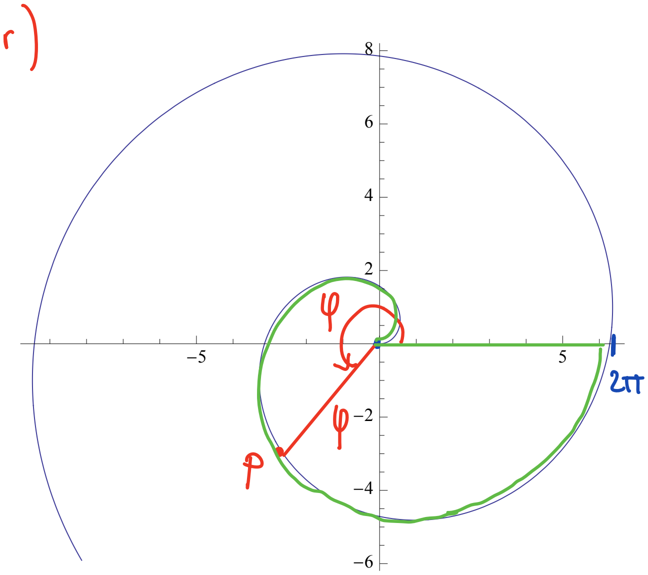
1 La spirale archimédienne

On considère la courbe du plan donnée en coordonnées polaires par l'équation

$$r = \varphi, \qquad , \ r \in \mathbb{R}_+$$

pour un angle $0 \leq \varphi \leq \alpha$ où α est un angle positif fixé, ce sera 2π tout à l'heure, et r est la distance au centre.





Pour calculer l'aire de la surface comprise entre la spirale et le rayon d'angle α, Archimède découpe l'angle α en n angles égaux $\delta = \alpha/n$. Il approche l'aire cherchée par une somme de secteurs de disque. Pour $1 \leq k \leq n$, il considère le rayon $\varphi = k\delta$ et son intersection avec la spirale. Soit A_k l'aire de la surface délimitée par la spirale et les rayons $\varphi = (k-1)\delta$ et $\varphi = k\delta$.

$$\frac{1}{2}\frac{\alpha^3}{n^3}(k-1)^2 = \big((k-1)\delta\big)^2 \cdot \frac{\delta}{2} < A_k < \underbrace{(k\delta)^2}_{r^2} \cdot \underbrace{\frac{\delta}{2}}_{\frac{\beta}{2}} = \frac{k^2}{2}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^3 = \frac{1}{2}\frac{\alpha^3}{n^3}\cdot k^2$$

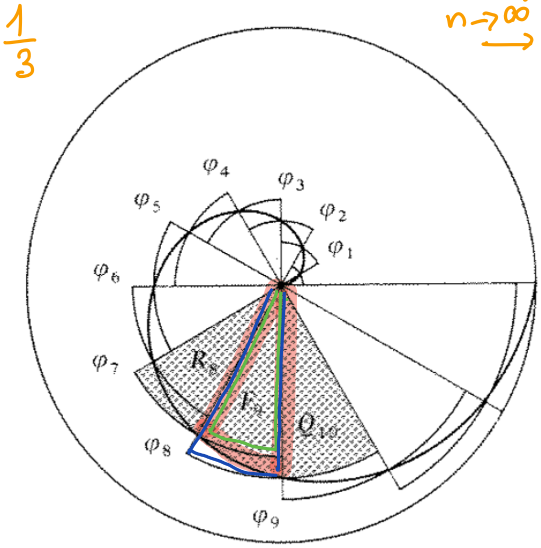
disque de rayon r

aire	angle
πr^2	2π
σ	$\beta \in [0;2\pi]$

$$\sigma = \frac{\beta}{2\cancel{\pi}}\cdot\cancel{\pi} r^2 = \frac{\beta r^2}{2}$$

Ainsi l'aire A cherchée est comprise entre deux sommes de petits et grands secteurs de disque :

$$\frac{\alpha^3}{6} \xleftarrow{n\to\infty} \frac{\alpha^3}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2}_{\xrightarrow{n\to\infty}\ \frac{1}{3}} < A < \frac{\alpha^3}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2}_{\xrightarrow{n\to\infty}\ \frac{1}{3}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\alpha^3}{6}$$



Nous avons un peu plus de technique à notre disposition qu'Archimède et pensons à utiliser le théorème des deux gendarmes. Lorsque n tend vers l'infini, les deux sommes tendent vers la même limite $\alpha^3/6$. Ce résultat se montre par un petit raisonnement par récurrence à faire en exercice.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{3}$$

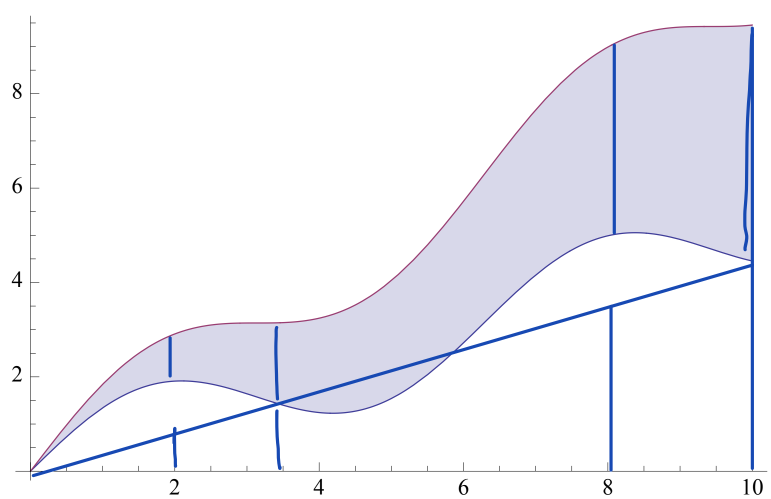
Proposition 1.1. *L'aire de la surface comprise entre la spirale d'Archimède et le rayon d'angle 2π vaut $\frac{4\pi^3}{3}$, soit exactement le tiers de l'aire du cercle de rayon 2π.*

Démonstration. La valeur de l'aire est donnée par la formule que nous avons trouvée ci-dessus pour $\alpha = 2\pi$.

$A_{2\pi} = \frac{(2\pi)^3}{6} = \frac{8\pi^3}{6} = \frac{4\pi^3}{3}$ et l'aire du disque $r = 2\pi$ vaut $\pi \cdot (2\pi)^2 = 4\pi^3$ □

Après les calculs d'Archimède d'aire et de volume, dont celui de la boule par exemple, il faut attendre environ 1800 ans pour que de nouveaux résultats voient le jour. Kepler publie en 1615 un article sur le volume d'un tonneau de vin. Sa méthode consiste à découper le volume en morceaux "infinitésimaux" et calculer la limite. Cavalieri, un élève de Galilée, rend ces méthodes plus systématiques et conceptualise l'idée de voir une surface comme une union infinie de segments, de même qu'un segment est une union infinie de points. Il est soutenu par Pascal, alors que d'autres dénigrent ses méthodes.

Exemple 1.2. Quelle est l'aire de la surface délimitée par les graphes des fonctions f et g définies algébriquement par $f(x) = \sin x + \frac{x}{2}$ et $g(x) = \sin x + x$ pour des valeurs $0 \leq x \leq 10$?



Cavalieri raisonnait ainsi : chaque segment vertical d'abscisse x est de longueur $x/2$. Ainsi l'aire de la surface cherchée est la même que celle de la surface

L'aire cherchée est ramenée à celle d'un triangle.

Dans le cas ci-dessus $A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25$

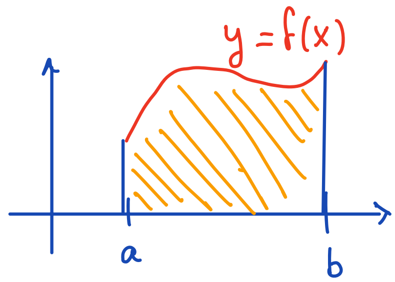
Newton et Leibniz sont les pères du calcul intégral, terminologie introduite en 1696 par Jakob Bernoulli. Mais les fondements théoriques seront développés par Cauchy, qui le premier se rend compte de la nécessité d'une démonstration de l'existence de l'intégrale, et complétés par Riemann.

Mister Riemann.

Né en 1826 à Breselenz, un village dans le royaume de Hanovre, dans l'actuelle Allemagne, Riemann étudie d'abord à l'université de Göttingen où Gauss dirigera sa thèse. Il meurt de tuberculose au cours d'un voyage en Italie, à l'âge de 39 ans. Ses contributions aux mathématiques sont énormes. On parle aujourd'hui encore de surfaces de Riemann, d'intégrale de Riemann - que nous verrons tout à l'heure. La célèbre conjecture de Riemann sur la fonction ζ est l'un des problèmes de Hilbert (1900) et l'un des sept problèmes du millénaire mis au concours par l'institut Clay pour un million de dollars...

2 Les sommes de Darboux

Jean Gaston Darboux (1842-1917) est un mathématicien français. Nous présentons ici sa méthode d'intégration en analyse. Nous travaillons avec une fonction réelle bornée définie sur un intervalle $[a, b]$ et cherchons à calculer l'aire de la surface comprise entre l'intervalle $[a, b]$ sur l'axe Ox et le graphe de la fonction, lorsque cela est possible !

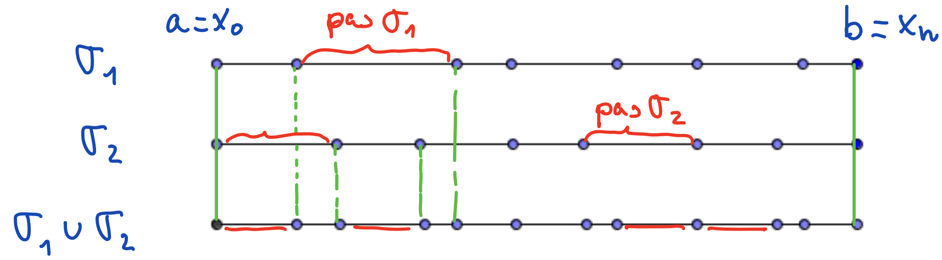


Définition 2.1. Une *subdivision* σ de l'intervalle $[a, b]$ est la donnée de nombres réels ordonnés $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

La subdivision $a,\ a + \frac{b-a}{n},\ \ldots,\ a + k\frac{b-a}{n},\ \ldots,\ a + (n-1)\frac{b-a}{n},\ b$

est appelée *subdivision régulière d'ordre n*.

Si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions du même intervalle $[a, b]$, on note $\sigma_1 \cup \sigma_2$ la nouvelle subdivision obtenue par la réunion des deux subdivisions :



Le *pas* d'une subdivision σ est la plus grande distance entre deux points successifs de la subdivision, c'est-à-dire le nombre réel $\max\{x_i - x_{i-1} \,|\, 1 \leq i \leq n\}$.

Le pas de la subdivision régulière d'ordre n de l'intervalle $[0, 1]$ vaut $1/n$.

Définition 2.2. Soit σ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur $[a, b]$ et bornée.

Sur chaque intervalle $[x_{i-1} ; x_i]$ fermé, on définit
m_i = borne inférieure de f et M_i = borne supérieure de f.

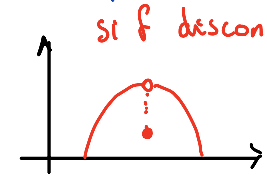
On définit alors la *somme de Darboux* inférieure $s_\sigma(f)$ et la *somme de Darboux* supérieure $S_\sigma(f)$ par

$$s_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i \quad \text{et} \quad S_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot M_i$$

On pose encore m la borne inférieure de la fonction f sur $[a, b]$ et M sa borne supérieure.

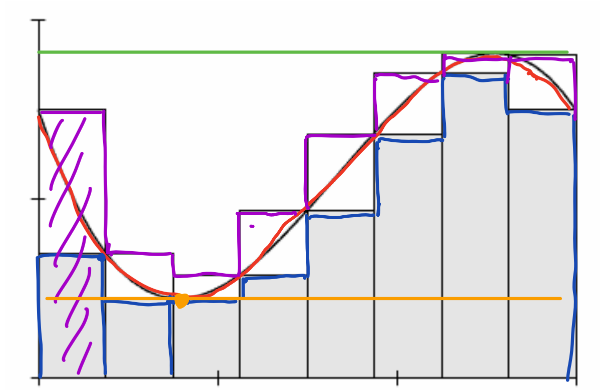
Remarque 2.3. Les nombres m_i et M_i existent puisque la fonction f est bornée (*) (nous avons vu que les nombres réels possèdent cette propriété, alors que $\mathbb{Q}$ non). Lorsque la fonction f est aussi continue sur $[a, b]$, la borne supérieure est le maximum de f sur l'intervalle et la borne inférieure est le minimum de f sur l'intervalle.

si f discontinue



(*) et que les intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ sont fermés.

On visualise sur l'illustration suivante le rapport entre les sommes de Darboux et l'aire de la surface comprise entre l'axe horizontal et le graphe de la fonction.



en bleu $s_\sigma(f)$

en violet : $S_\sigma(f)$

Lemme 2.4. *Soit σ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur $[a, b]$ et bornée. Alors*

$$m(b-a) \leq s_\sigma(f) \leq S_\sigma(f) \leq M(b-a)$$

3 Les fonctions intégrables

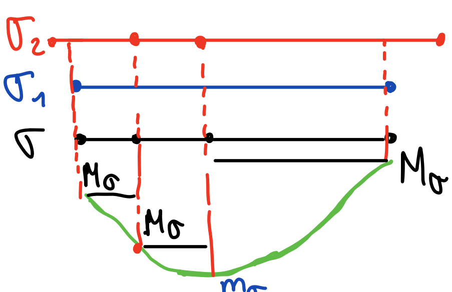
$s_\sigma(f)$

Le lemme précédent est une évidence puisque $m \leq m_i \leq M_i \leq M$ pour tout i, mais il nous permet d'affirmer que la borne supérieure $s(f)$ de toutes les sommes de Darboux inférieures existe et que la borne inférieure $S(f)$ de toutes les sommes de Darboux supérieures existe aussi (on calcule ces bornes sur toutes les subdivisions possibles de l'intervalle $[a, b]$).

$S_\sigma(f)$

Lemme 3.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur $[a, b]$ et bornée. Alors $s(f) \leq S(f)$.*

Démonstration. Nous allons montrer que toute somme de Darboux inférieure est plus petite ou égale que toute somme de Darboux supérieure.
Considérons en effet deux subdivisions σ_1 et σ_2, ainsi que la réunion $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Alors



$$s_{\sigma_1}(f) \leq s_\sigma(f) \leq S_\sigma(f) \leq S_{\sigma_2}(f)$$

puisque la borne inférieure de f sur un intervalle donné est ≤ à la borne inférieure sur un sous intervalle. □

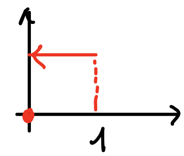
Définition 3.2. Une fonction réelle bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *intégrable* sur $[a, b]$ si $s(f) = S(f)$. Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = s(f) = S(f)$ et on appelle ce nombre réel l'*intégrale définie* de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.

$\sum \longrightarrow \int$ lorsque $n \to \infty$

$x_i - x_{i-1} \longrightarrow dx$

$a = 0$ et $b = 1$

Exemple 3.3. Soit la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1$ pour tout $x > 0$. Cette fonction est discontinue en $x = 0$, mais elle est intégrable.



Pour toute subdivision σ : $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$,

on a $m_1 = 0 = f(0)$ et $m_i = 1$ si $i > 1$

$\Rightarrow s_\sigma(f) = 0(x_1 - x_0) + 1(\cancel{x_2} - x_1) + 1(\cancel{x_3} - \cancel{x_2}) + \cancel{\dots} + 1(x_n - x_{n-1}) = x_n - x_1 = 1 - x_1$

Par ailleurs, $M_i = 1 \ \forall i \Rightarrow S_\sigma(f) = 1(x_1 - x_0) + 1 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + 1(x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = 1$

$\Rightarrow S(f) = 1$ et $s(f) = 1$ car x_1 peut être arbitrairement proche de 0.

La plupart des fonctions que nous intégrerons seront continues.

Proposition 3.4. *Toute fonction réelle continue définie sur $[a, b]$ est intégrable.*

Démonstration. Nous devons montrer que $s(f) = S(f)$. Puisque $s(f) \le S(f)$ par le dernier lemme, il suffit de montrer que $\forall\, \varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ telle que $S_\sigma(f) - s_\sigma(f) \le \varepsilon$.
La démonstration utilise le fait qu'une fonction continue sur un intervalle fermé est *uniformément continue* : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que, si $|x - y| < \delta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (indépendamment de x ou y). Ainsi, si l'on choisit une suite régulière de pas $< \delta$, on voit que $M_i - m_i < \varepsilon$, si bien que la différence entre les sommes de Darboux supérieure et inférieure est plus petite que $(b - a)\varepsilon$. Cette quantité est arbitrairement petite... □

D'après la définition d'intégrabilité, il faudrait utiliser toutes les subdivisions de $[a, b]$. Riemann a montré qu'il suffit de travailler avec les subdivisions régulières. L'idée est que pour toute subdivision, il en existe une régulière qui est plus "fine" (dont le pas est plus petit).

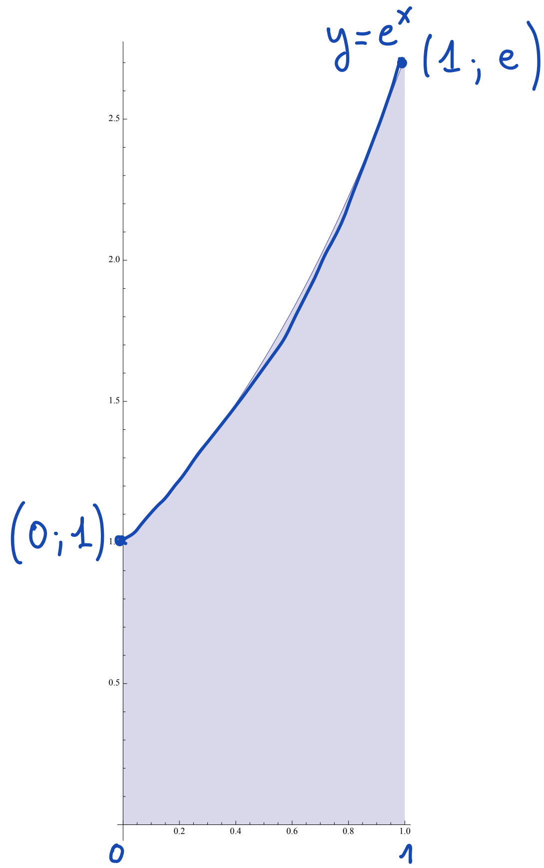
Proposition 3.5. Intégrabilité au sens de Riemann
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et σ_n une suite de subdivisions dont le pas tend vers zéro. Alors si

$$\lim_{n\to\infty} s_{\sigma_n}(f) = \lim_{n\to\infty} S_{\sigma_n}(f),$$

la fonction f est intégrable et la limite ci-dessus est $\int_a^b f(x)dx$.

Exemple 3.6. La fonction exponentielle est continue sur $[0, 1]$, donc intégrable.

Pour calculer $\int_0^1 e^x\, dx$, il suffit donc de calculer la limite des sommes de Darboux inférieures prises sur les subdivisions régulières $\sigma_n : 0 < 1/n < \dots < i/n < \dots < 1. = \frac{n}{n}$



Comme e^x est croissante, le minimum sur $I=\left[\frac{i-1}{n};\frac{i}{n}\right]$ vaut

$e^{\frac{i-1}{n}} = m_i$

$$S_{\sigma_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i-1}{n}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}} \overset{k=i-1}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k \quad (*)$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{1-\left(e^{1/n}\right)^n}{1-e^{1/n}} = \frac{1}{n}\,\frac{1-e}{1-e^{1/n}} = (1-e)\,\frac{1}{n\left(1-e^{1/n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-e)\,\frac{1}{n\left(1-e^{1/n}\right)} \overset{t=\frac{1}{n}}{=} \lim_{t\to 0_+}(1-e)\,\frac{t}{1-e^t} \overset{\frac{0}{0}\to B.H}{=} (1-e)\lim_{t\to 0_+}\frac{1}{-e^t}$$

$$= (1-e)(-1) = \underline{e-1}$$

(*) Suite géométrique de raison $e^{\frac{1}{n}} = r$

Formule pour le calcul de la somme d'une S.G : $S_n = a_0\,\frac{1-r^n}{1-r}$

et si $|r| < 1$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_0}{1-r}$