

Exercices – Semaine 3

Exercice 1.

Soit $f: A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux.

1. Montrer que $\text{car}(B)$ divise $\text{car}(A)$, mais qu'en général $\text{car}(B) \neq \text{car}(A)$.
2. Montrer que si f est injectif alors $\text{car}(B) = \text{car}(A)$.
3. Montrer que si A est commutatif et $\text{car}(A) = p$, un nombre premier, alors l'application $F: A \rightarrow A$ définie par $F(a) = a^p$ est un homomorphisme d'anneaux.
4. Calculer la caractéristique de l'anneau $\mathbb{Z}[i]/(i-2)$. Exprimer cet anneau en fonction d'anneaux de forme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour des $n \in \mathbb{Z}$.
5. Même questions pour $\mathbb{Z}[i]/(i+3)$.

Exercice 2.

Soit $A = \mathbb{Z}/250\mathbb{Z}$.

1. Trouver tous les diviseurs de zéro et tous les éléments inversibles de A .
2. Trouver tous les idéaux de A qui contiennent l'élément $[50]_{250}$. (Ce qu'on veut dire par cette notation c'est l'image de 50 dans $\mathbb{Z}/250\mathbb{Z}$.)

Exercice 3.

Soit A le sous-anneau de $M_2(\mathbb{Z})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Montrez que le sous-ensemble K des matrices pour lesquelles $5 \mid a$ et $11 \mid b$ est un idéal bilatère et construisez un isomorphisme (en deux temps) $A/K \rightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

Exercice 4.

Soit R un anneau commutatif.

1. Montrer que $R[x, y]/(x) \cong R[y]$ (donner la forme explicite d'un isomorphisme).
2. Construire un homomorphisme d'anneaux $R[x, y] \rightarrow R[x] \times R[y]$ dont le noyau est (xy) .
3. Identifier l'image de cet homomorphisme et en conclure que $R[x, y]/(xy)$ est isomorphe au sous-anneau de $R[x] \times R[y]$ formé des couples de polynômes $(p(x), q(y))$ tels que $p(0) = q(0)$.

Exercice 5.

Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'idéal proposé est premier ou maximal.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| (a) $(0) \subset \mathbb{Z}$. | (e) $(42) \subset \mathbb{Z}[t]$. |
| (b) $(t) \subset \mathbb{Z}[t]$. | (f) $(t^2 - 2) \subset \mathbb{Z}[t]$. |
| (c) $(t) \subset \mathbb{R}[t]$. | (g) $(t^2 - 2) \subset \mathbb{R}[t]$. |
| (d) $(101) \subset \mathbb{Z}[t]$. | (h) $(t + 5, 10) \subset \mathbb{Z}[t]$. |

(i) $(t + 5, 11) \subset \mathbb{Z}[t]$.

(j) $(t^2 + 1, 2) \subset \mathbb{Z}[t]$.

Indication : Pour prouver qu'un idéal bilatère $I \subset A$ est premier, il suffit de montrer que le quotient A/I est intègre.

Exercice 6.

Soient A et B deux anneaux commutatifs. Quels sont les idéaux de $A \times B$? Quels sont les idéaux premiers de $A \times B$?

Exercice 7.

Soit A un anneau commutatif.

1. Montrez que si $\mathfrak{m}$ est maximal et est composé uniquement d'éléments nilpotents, alors c'est l'unique idéal maximal de A . La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrez que $A \setminus A^\times$ est un idéal si et seulement si A a un unique idéal maximal.

Exercice 8.

Soit

$$\mathbb{H} := \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus j\mathbb{R} \oplus k\mathbb{R}$$

l'anneau non-commutatif des *quaternions*. La multiplication est inférée des relations suivantes:

$$k = ij \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad ij = -ji$$

Montrez que tout élément non-nul de $\mathbb{H}$ a un inverse multiplicatif. (Pensez à l'inverse dans le cas complexe.)