

Série 23

Exercice 1. Détermine le domaine de définition des fonctions réelles suivantes :

a) $f(x) = \cot(x)$

b) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{\sin(x)}$

c) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{\cos(x)}$

d) $f(x) = \tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

e) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + x}{x^2 + x}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 1}{x + 1}$

g) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2 + 1}$

h) $f(x) = \tan(3x/2)$

i) $f(x) = \arctan(|x|)$

j) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

k) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x}{x-1}}$

l) $f(x) = x^{2/3}$

m) $f(x) = x^{m/n} \quad (m, n \in \mathbb{N}^*)$

Exercice 2. Détermine si les fonctions suivantes sont paires ou impaires.

a) $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$

b) $f(x) = x^5 - x^3 + \sin(x)$

c) $f(x) = \cos(x) + x^{16}$

d) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$

e) $f(x) = 3\cos^2(x) + 7\sin(x^2)$

f) $f(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$

g) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

Exercice 3. Détermine toutes les fonctions qui sont à la fois paires et impaires.

Exercice 4. On considère une fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$.

a) Étudie la parité de la fonction $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par la formule $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$.

b) Étudie la parité de la fonction $i = f - p$.

c) Déduis des deux parties précédentes que toute fonction f peut être écrite comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

d) Trouve une telle décomposition pour $f(x) = 7x^5 - 3x^4 + 6x^2 + 4x - 9$ et $g(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3})$.

Exercice 5. Symétrie. Démontre les équivalences suivantes :

a) La fonction f admet un axe de symétrie $x = a$ si et seulement si la fonction $g(x) = f(x + a)$ est paire.

b) La fonction f admet une symétrie de centre $(a; b)$ si et seulement si la fonction $g(x) = f(x + a) - b$ est impaire.

Exercice 6.

a) Démontre que la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ admet la droite $x = 2$ pour axe de symétrie.

b) Démontre que la fonction $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$ admet le point $(-1; 4)$ pour centre de symétrie.

c) Démontre que la fonction $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$ admet le point $(3; 2)$ pour centre de symétrie.

d) Démontre que la fonction $f(x) = \dfrac{4x^2 + 8x + 3}{x^2 + 2x - 3}$ admet la droite $x = -1$ pour axe de symétrie.

Exercice 7. Vrai ou faux ? Dans chaque cas justifie ta réponse ! On considère deux fonctions paires f et g et une fonction impaire h.

a) La somme $f + h$ est paire.

b) La somme $f + g$ est paire.

c) Le quotient f/h est pair.

d) La valeur absolue $|h|$ est paire.

e) La valeur absolue $|f|$ est paire.

f) Le carré $(f + h)^2$ est pair.

g) La somme $(f^2 + h^2)$ est paire.

h) La fonction $x \mapsto \sin(f(x))$ est paire.

i) La fonction $x \mapsto \cos(f(x))$ est paire.

j) La fonction $x \mapsto \sin(h(x))$ est impaire.

Exercice 8. [Composition, injectivité, et surjectivité.] Soient $f : D \to E$ et $g : C \to D$ deux fonctions. Démontre les affirmations suivantes :

a) Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.

b) Si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.

c) Dans le cas où $C = E$, on a $[\, f \circ g = \mathrm{Id}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}\,]$ si et seulement si $[\, f$ est bijective et $f^{-1} = g\,]$. (Ici, Id dénote la fonctions identité.)

Les réciproques de **a)** et **b)** sont-elles vraies ?

Exercice 9. Détermine le maximum, le minimum, le supremum et l'infimum des fonctions suivantes, lorsqu'ils existent. Fais bien attention au domaine de définition !

a) $$f :]-\pi/2; \pi/2] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(x)$$

b) $$f : [-2; 2] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

c) $$f : [-2; 2] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 + 1$$

d) $$f : [0; 2[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lfloor x \rfloor$$

Exercice 10. Trouve le maximum et le minimum de la fonction $f : [-1; 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = |x^2 - x| + |x|$$

Indication. Essaie de décrire la fonction f sans utiliser les valeurs absolues, mais au prix de devoir utiliser des expressions différentes sur plusieurs intervalles.

Exercice 11. On considère la fonction

$$\begin{array}{cccc} f & : & [0;1] & \to & [0;1] \\ & & x & \mapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array}$$

Vérifie que cette fonction est bijective et détermine son inverse.

Exercice 12. Détermine si la fonction suivante est bijective.

$$\begin{array}{cccc} f & : & [\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}] & \to & [1;3] \\ & & x & \mapsto & \sin(x) + 2 \end{array}$$

Montre ensuite que les restrictions $f' : [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \to [1; 3]$ et $f'' : [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}] \to [1; 3]$ de f sont bijectives, et détermine leurs inverses.

Exercice 13. Soit r un nombre rationnel. Donne, lorsqu'elle existe, la réciproque de la fonction f définie par $f(x) = x^r$. N'oublie pas de donner les ensembles de définition.

Annexe de la Série 23 : Rappels et définitions

Ensemble de définition, image et graphe.

- Une fonction réelle est une application f d'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle D l'**ensemble de définition** de f (ou le **domaine de définition** de f) et on le note aussi D_f ou $D(f)$. On écrit $f : D \to \mathbb{R}$ pour indiquer que f est une application qui à tout élément de D associe un nombre réel.
- L'**image de** f est $f(D) := \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D \text{ avec } f(x) = y\}$. On peut alors écrire une fonction réelle comme $f : D \to E$, où E est n'importe quel sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui contient l'image de f. Dans ce cas, l'ensemble E est appelé l'**ensemble d'arrivée de** f.
- Le **graphe** d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$G(f) = \{(x; f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D\}$$

  Pour autant que cela ne prête pas à confusion, on écrira abusivement f plutôt que $G(f)$ (formellement, f est le triplet formé de D, de l'ensemble d'arrivée de f, et du graphe de f).

Injectivité et surjectivité.

- Une fonction $f : D \to E$ est **injective** si deux points distincts ont des images distinctes, c'est-à-dire si $x \neq y$ implique $f(x) \neq f(y)$ pour tout $x, y \in D$.
- Une fonction $f : D \to E$ est **surjective** si tout élément de E est l'image d'un élément de D.
- Enfin, une fonction $f : D \to E$ est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, ou, en d'autres termes, si tout point de E est l'image d'un unique point de D.

Remarque. Une fonction réelle $f : D \to E$ est injective si et seulement si toute droite horizontale de $\mathbb{R}^2$ (intersectant Oy en un point de E) coupe le graphe de f en au plus un point. Une fonction réelle $f : D \to E$ est surjective si et seulement si toute droite horizontale de $\mathbb{R}^2$ (intersectant Oy en un point de E) coupe le graphe de f en au moins un point.

Préimage et fonction réciproque.

- Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $S \subset \mathbb{R}$. La **préimage** par f de S est l'ensemble $f^{-1}(S) \subset D$ des points de D dont l'image se trouve dans S :

$$f^{-1}(S) = \{x \in D \mid f(x) \in S\}$$

- Lorsque $f : D \to E$ est bijective on utilise aussi la notation $f^{-1} : E \to D$ pour la **fonction réciproque** qui à tout élément $y \in E$ associe le seul point dans la préimage $f^{-1}(\{y\})$. Autrement dit, f^{-1} est la fonction qui envoie y sur l'unique point $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.
  (La fonction f^{-1} est souvent appelée fonction **inverse** de f au lieu de **réciproque** de f.)

Remarque. Pour une fonction bijective f, nous avons

$$G(f) = \{(x; y) \mid x \in D(f) \text{ et } y = f(x)\}$$

et

$$G(f^{-1}) = \{(y; f^{-1}(y)) \mid y \in f(D(f))\} = \{(y; x) \mid x \in D(f) \text{ et } y = f(x)\}$$

En d'autres termes, pour tout point $(x; y)$ du graphe de f, le point $(y; x)$ appartient au graphe de f^{-1}. Par conséquent le graphe $G(f^{-1})$ est l'image de $G(f)$ par une symétrie axiale d'axe $x = y$.

Symétries du graphe.

- Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que si $x \in D$ alors $-x \in D$.

  Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D$. Dans ce cas, l'axe Oy sera un axe de symétrie du graphe de f.

  Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D$. Dans ce cas, l'origine O sera un centre de symétrie du graphe de f.

- Plus généralement, soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que si $x + a \in D$ alors $-x + a \in D$. La droite verticale $x = a$ sera un axe de symétrie du graphe de la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ si pour tout $x + a \in D$,
$$f(x + a) = f(-x + a)$$
  Le point $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ est un centre de symétrie du graphe de la fonction f si pour tout $x + a \in D$,
$$f(x + a) - b = -f(-x + a) + b$$

Majorants, minorants, supremum, infimum, maximum et minimum d'une fonction.

- Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est **majorée** sur D s'il existe un nombre réel M tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in D$, autrement dit, l'image $f(D)$ de f est un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$.
- Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est **minorée** sur D si $f(D)$ est un sous-ensemble minoré de $\mathbb{R}$.
- La **borne supérieure** (ou **supremum**) d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est, si elle existe, la borne supérieure de l'ensemble $f(D)$. En d'autres termes, la borne supérieure de f est, si elle existe, le plus petit des majorants de $f(D)$. Bien souvent, une borne ne fait pas partie de l'image de la fonction, de même que la borne d'un sous-ensemble n'en fait pas forcément partie.
- La **borne inférieure** (ou **infimum**) d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est, si elle existe, la borne inférieure de l'ensemble $f(D)$. La borne inférieure de f est donc, si elle existe, le plus grand des minorants de $f(D)$.
- Le **maximum** d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est un majorant M de la fonction tel qu'il existe un $x \in D$ avec $f(x) = M$. On le note $\max(f)$ ou $\max_D(f)$ pour indiquer qu'on considère l'ensemble de définition.
- Le **minimum** d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est un minorant m de f tel qu'il existe un $x \in D$ avec $f(x) = m$. On le note $\min(f)$ ou $\min_D(f)$.